

# Análisis del estado tensional en el contacto de dientes de engranajes cilíndricos mediante el Método de Elementos Finitos.

**O. González Quintero, E. Alfonso Brindis.**

Departamento de Ingeniería Mecánica.

Facultad de Ingenierías Química y Mecánica.

Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos". Cuba

E – mail: orestes.gonzalez@umcc.cu , eleno.alfonso@umcc.cu

(Recibido el 4 de mayo de 2008; aceptado el 18 de julio de 2008)

## Resumen

En este estudio es usado el Método de Elementos Finitos (MEF) para modelar el contacto bajo carga de los flancos del diente tratados con un proceso de endurecimiento combinado. Este proceso de endurecimiento permite crear tensiones de compresión en las capas superficiales para favorecer la obtención de una mejor resistencia a la fatiga de los elementos de máquinas. En el trabajo se analiza el tránsito de la deformación de elástica a elastoplástica, el desarrollo y distribución de la tensión residual según aumenta la deformación plástica, el complejo campo de tensiones que prevalecen alrededor del contacto de un par de dientes de engranaje durante su funcionamiento y la valoración del límite de fluencia local.

**Palabras claves:** Engranajes, endurecimiento subestructural, deformación plástica, envejecimiento, Método de Elementos Finitos.

## 1. Introducción.

Desde comienzos de la década del 90, en Cuba se conocen de trabajos dirigidos al desarrollo de la teoría y práctica del endurecimiento subestructural en los metales [1] como una forma alternativa de mejorar la resistencia de los metales con el empleo de los tratamientos mecánico-térmicos simple y reiterado. En esta línea de desarrollo se enmarca el presente trabajo.

Por otra parte, los métodos tradicionales de cálculo basados en criterios simplificados de la Resistencia de Materiales no pueden producir resultados apropiados o adecuados en el análisis de situaciones complicadas, de manera que deben de ser aceptadas suposiciones y simplificaciones para que las soluciones pueden ser obtenidas mediante un cálculo manual. En la actualidad, los procedimientos de cálculos para evaluar las tensiones en los flancos de los dientes conjugados en engranajes cilíndricos, además del uso de métodos experimentales, se ha demostrado que las técnicas numéricas usando computadoras digitales proveen una alternativa poderosa [3, 4, 6, 9,10].

Así, es usado el Método del Elementos Finitos (MEF) en este trabajo para modelar el tratamiento mecánico térmico, a través del análisis del esfuerzo y deformaciones por contacto en el flanco del diente. El

objetivo de este estudio es pronosticar, en engranajes cilíndricos de dientes rectos sometidos a un endurecimiento subestructural como operación final del proceso de fabricación, el comportamiento de las tensiones residuales en la capa superficial de la zona de trabajo de los dientes.

## 2. Materiales y métodos.

El Método de Elementos Finitos permite realizar un modelo matemático de cálculo del sistema real, más fácil y económico de modificar que un prototipo. No obstante no deja de ser un método aproximado de cálculo debido a las hipótesis básicas del método. Los prototipos, por lo tanto, siguen siendo necesarios, pero en menor número, ya que el MEF puede acercarse bastante a un buen diseño [6]. La validación del MEF está constatada ampliamente con la utilización del mismo a escala mundial.

Debido a que el engranaje cilíndrico de dientes rectos puede ser considerado como un componente bidimensional, sin pérdida de generalidad, puede ser usado el análisis de deformaciones planas. Basado en la anterior afirmación, para el análisis del contacto en un engranaje cilíndrico de dientes rectos fue construido un modelo 2D asimétrico de contacto.

El modelo geométrico fue creado a partir de su representación en AutoCAD [5], de donde se obtuvieron las coordenadas rectangulares de los puntos notables del par dentado para su modelado en un software profesional de elementos finitos.

Como en esta investigación se presupone una respuesta del material, post-límite de fluencia, se emplea un sistema de ecuaciones no lineales y es requerido un método de solución iterativo, en este caso fue utilizado el Método de *Newton-Raphson*.

Las condiciones del contacto de los dientes del par engranado es sensible a la geometría de las superficies en contacto, lo que significa que los elementos cerca de la zona de contacto necesitan ser refinados, lo que no es recomendable para todo el modelo con el propósito de reducir los requerimientos computacionales. El modelo tuvo un total de 2529 elementos y 6243 nodos. El área fina del mallado cerca del polo de engrane es diferenciada del resto, con el propósito de circundar la región de altas tensiones colindante a la región del contacto, esto se muestra en la Fig. 1.

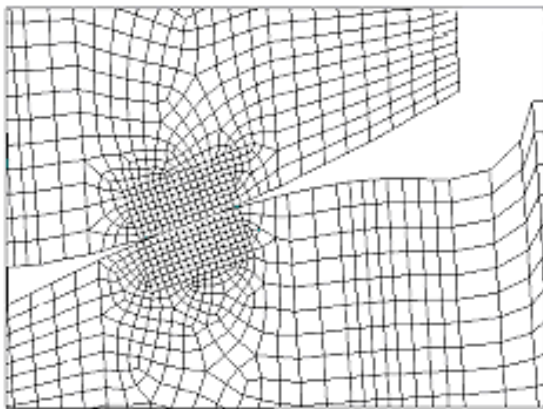


Figura 1. Mallado con elementos finitos en la cercanía de la superficie de contacto.

El tratamiento mecánico térmico aplicado esta definido como un tipo de endurecimiento subestructural que combina la deformación plástica con el posterior tratamiento térmico (envejecimiento artificial) para la obtención de elevados índices de calidad de sus capas superficiales. Este tratamiento incluye las etapas de aumento de la densidad de las dislocaciones (apilamiento) por intermedio de la deformación plástica y la reestructuración de las dislocaciones en las subfronteras con la aplicación del envejecimiento artificial.

La simulación del tratamiento mecánico térmico se ejecutó con tres variantes de carga. Las condiciones de carga para cada variante, definidas luego de un amplio sondeo preliminar, se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Condiciones de carga en cada variante

variante	Ft (N)	Fr (N)	Fn (N)	T± 5°C	n min <sup>-1</sup>
1	1,00E+04	3,66E+03	1,07E+04	110	180
2	7,10E+03	2,59E+03	7,56E+03	110	250
3	5,03E+03	1,83E+03	5,35E+03	110	355

Donde: Ft: Fuerza en la componente tangencial en el diente. Fr: Fuerza en la componente radial en el diente. Fn: Fuerza normal en el diente. T: Temperatura de aplicación del tratamiento. n: Frecuencia de rotación de la rueda.

Las propiedades del material comunes a todas las variantes del experimento se muestran en la Tabla 2. Estas propiedades del material permiten una efectiva modelación de todos los regimenes de contacto elastoplástico previstos.

Tabla 2. Propiedades mecánicas del material de las muestras.

Propiedades del material	Magnitudes
Módulo de elasticidad	200 GPa
Coefficiente de Poisson	0.27
Límite de fluencia	390 MPa
Módulo tangente	160 GPa
Coefficiente de expansión térmica	1,1.10 <sup>-5</sup> mm/m°K

El modelo de material adoptado en la experimentación es la Opción de Endurecimiento Bilineal Isotrópico (*BISO*, por sus siglas en inglés). Este modelo emplea el criterio de fluencia de Von Mises unido a la asunción de una acritud isotrópica.

En el modelo del diente de la rueda (objeto de estudio), las condiciones de frontera fueron definidas como las limitaciones de todos los desplazamientos de traslación de los nodos del contorno que presentan las conexiones del cuerpo de la rueda con el eje, mientras que para el diente del piñón (que en este estudio es la herramienta para inducir la deformación plástica) fueron limitados todos los desplazamientos de traslación y giratorios a los nodos que tienen conexiones con el eje.

La carga fue simulada con fuerzas aplicadas discretamente y concentradas en el cuerpo del diente del piñón en posición radial conocida, según se muestra en la Fig. 2. De esta forma el momento total para aplicar la carga al diente mallado es igual al momento en el eje de la rueda dentada.



Figura 2. Condiciones de frontera en modelo del par dentado.

### 3. Resultados y discusión.

El análisis fue realizado considerando que el contacto se realiza por un solo par de dientes, es decir con engrane en la zona cercana al polo de engrane. Fue usado el método de deformación para modelar el problema del contacto. Una vez determinado el campo de los desplazamientos fueron derivadas las deformaciones y las tensiones utilizando las relaciones que implicaban la deformación-desplazamiento y la tensión-deformación respectivamente.

Como control de la validez del modelo utilizado, fueron calculadas las fuerzas de reacción durante la condición descargada. Basados en la condición de equilibrio de fuerzas una vez que el contacto es descargado completamente las fuerzas de reacción deben ser cero. Esta condición trivial reportada en Hearn [6] y Jackson [7] es satisfecha con un elemento finito de ocho nodos empleado en el desarrollo general del modelo utilizado.

En el proceso de análisis de la formación de tensiones, fue observado que al aplicar la carga en los dientes se inicia la formación de una región de altas tensiones debajo de la frontera común de las superficies en contacto. En esta región de elevados esfuerzos, eventualmente el material fluye y se forma un núcleo plástico. El núcleo plástico está rodeado de material elástico, lo cual disminuye en la medida que el modelo es sometido a cargas mayores. En las cargas superiores, el núcleo plástico se expande tridimensionalmente por la superficie y también hacia el centro del modelo, debido a que el material que fluye plásticamente ya no resiste la carga adicional. Por consiguiente, cualquier carga adicional es soportada por las regiones elásticas circundantes. Es decir, cuándo el límite de elasticidad es excedido las deformaciones posteriores resultan en movimiento de las dislocaciones, alteración de la red cristalina y la formación de micro-tensiones, pero sin incremento adicional en la tensión macroscópica.

En este análisis es usado el valor de la tensión de *Von Mises* para predecir la fluencia del material en la zona de contacto. La tensión de *Von Mises* (ver Figs. 3 y 4) muestra cuan “intenso” es el estado de tensión relativo al límite de fluencia.

Con el propósito de monitorear el estado de las tensiones sub-superficiales fueron seleccionados los nodos a lo largo de un eje virtual, normal al perfil del diente a partir del punto de contacto y dirigido hacia el interior del mismo hasta una profundidad  $\Delta = 0,57$  mm. Las Figs. 5 y 6 muestran los gráficos de las tensiones de *Von Mises* correspondiente a los nodos localizados debajo del punto de contacto inicial con el par dentado cargado y descargado. El valor nodal de las tensiones de *Von Mises* en los nodos situados debajo del punto de contacto inicial con el par dentado cargado, por su interés, se muestra en la Tabla 3.

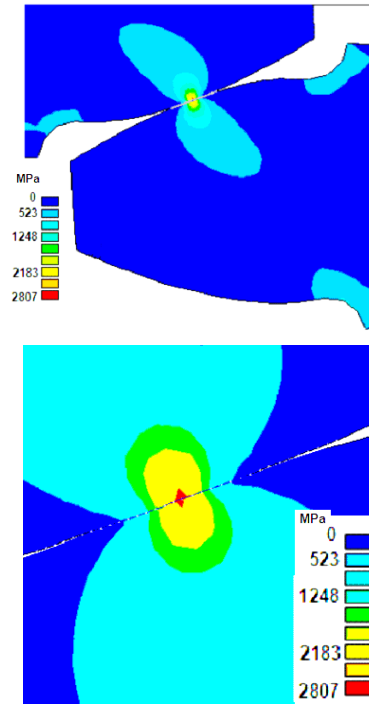


Figura 3 - Contornos de tensiones de *Von Mises* en par de dientes cargado con una fuerza normal de  $F_n = 10\,700$  N. En la imagen inferior detalle de la distribución de tensiones en el polo.

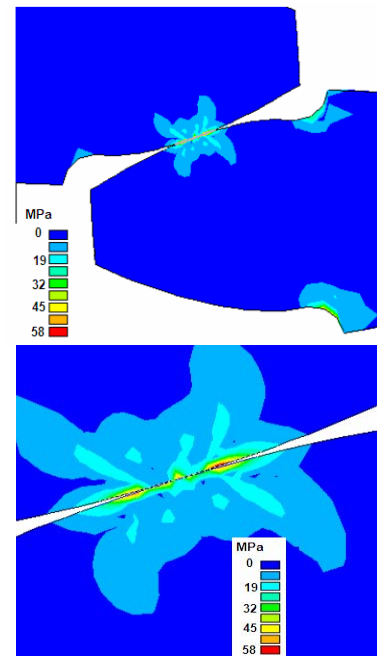


Figura 4 - Contorno de tensiones de *Von Mises* en par de dientes descargados luego de soportar una fuerza normal de  $F_n = 10\,700$  N. En la imagen inferior detalle de la distribución de tensiones en el polo

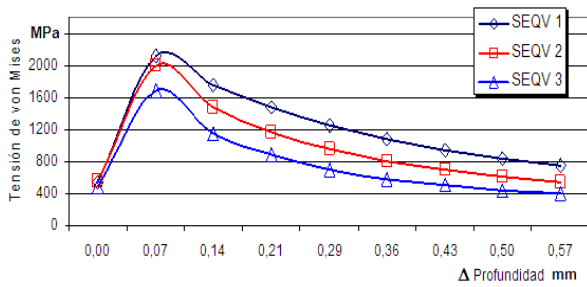


Figura 5 – Comportamiento de las tensiones de Von Mises en nodos situados debajo del punto de contacto inicial con el par dentado cargado. (SEQV 1 corresponde a 10700N, SEQV 2 corresponde a 7560N y SEQV 3 corresponde a 5350N)

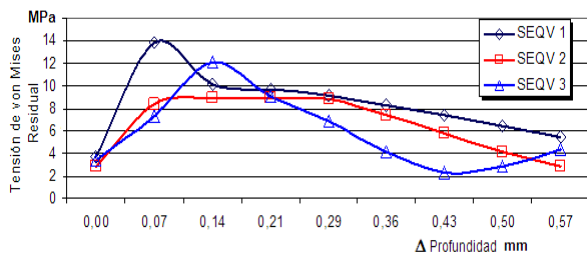


Figura 6 – Comportamiento de las tensiones de Von Mises residuales en los nodos situados debajo del punto de contacto inicial con el par dentado descargado.

Tabla 3 - Valores de las tensiones de Von Mises (MPa) con el par dentado cargado, según SEQV 1, 2 y 3.

$\Delta$ ,mm	Nodo	SEQV 1	SEQV 2	SEQV 3
0,00	434	544,79	556,53	488,21
0,07	496	2123,00	1995,00	1677,50
0,14	494	1759,10	1472,50	1150,10
0,21	492	1475,10	1164,40	877,67
0,29	490	1246,20	946,16	696,93
0,36	488	1071,30	795,38	578,87
0,43	486	936,60	685,73	495,70
0,50	484	831,53	603,53	434,68
0,57	467	748,45	540,24	393,73
Promedio		<b>1192,90</b>	<b>973,27</b>	<b>754,82</b>

El comportamiento de la tensión-deformación de los metales y aleaciones a bajas deformaciones es casi siempre reversible y lineal. Sin embargo, el rango elástico está limitado por el límite de fluencia, las tensiones por encima del límite de fluencia generan deformaciones permanentes o inelásticas. En el rango plástico, el flujo de la tensión usualmente se incrementa con la correspondiente cantidad de deformación plástica acumulada y se convierte en el nuevo límite de fluencia cuando el material es descargado (Barlat [2], 2007). De tal manera, los promedios de tensiones equivalentes mostrados en la Tabla 3 constituyen los nuevos límites de fluencia locales para los modelos analizados.

Al ser la tensión de Von Mises una magnitud positiva, no revela si el material está sometido a tensiones de tracción, compresión, cortante, etc. En estos términos, es importante juzgar la distribución del tensor de tensión completo por todo el modelo. Según lo conocido, cuando el modelo plásticamente deformado se descarga, el material elástico intenta restaurar su forma original. Sin embargo, las regiones plásticamente deformadas inhiben esto, pues el estado del material ha cambiado (Barlat, 2007). Esto resulta en regiones de tracción y de compresión, aun cuando sea cero la suma de la fuerza global aplicada al sistema.

La Fig. 7 muestra la distribución de las tensiones  $\sigma_x$  y las regiones de esfuerzo de compresión y de tracción en la dirección del eje x. La Fig. 8 muestra la distribución de tensiones en la dirección de y, donde la diferente distribución de tensiones de  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  contribuirán a tensiones de Von Mises más grandes en ciertas regiones.

La Fig. 9 muestra la gráfica del contorno de la tensión cortante  $\tau_{xy}$  (SXY) para los modelos cargado y descargado con una fuerza normal igual a  $F_n = 10700$  N. En la distribución de tensiones, se observa cerca del borde de contacto la localización de una región de esfuerzo de cizallamiento positivo próximo al eje virtual que queda al lado de una región de tensión de cizallamiento negativa. El esfuerzo de cizallamiento parece alcanzar el máximo en un punto fuera de dicho eje, formando así aros de esfuerzo de cizallamiento alrededor a ambos lados del punto de contacto y abarcando una buena parte del diente. Este esfuerzo de cizallamiento amplifica las tensiones de Von Mises dentro del modelo. La Fig. 9(a) ilustra las condiciones de tensión que prevalecen alrededor del contacto de un diente de engranaje típico durante su funcionamiento (Hearn, 1997; Wei, 2004).

En las Figs. 10 y 11 se muestran los gráficos de las componentes de la tensión, y en las Figs. 12 y 13 los gráficos de las tensiones principales, en todos los casos correspondiente a los nodos situados debajo del punto de contacto inicial con el par dentado cargado y descargado respectivamente desde  $F_n = 10700$  N.

Al analizar el comportamiento de las componentes de la tensión ilustrado en las Figs. 10 y 11, puede apreciarse que en todas las variantes se manifiesta la misma tendencia a la recuperación elástica una vez retirada la carga, llegando incluso a cambiar el signo de la tensión en algunos nodos.

En los gráficos de las tensiones principales se puede apreciar igualmente el comportamiento de la recuperación elástica y el cambio de signo de la tensión en algunos nodos.

En el caso de las Figs. 5 y 6, la disímil distribución de las tensiones  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  es la causa que favorece la existencia de tensiones de Von Mises mayores en ciertas regiones, en particular en el nodo 496 en el estado cargado (Ver Tabla 3).

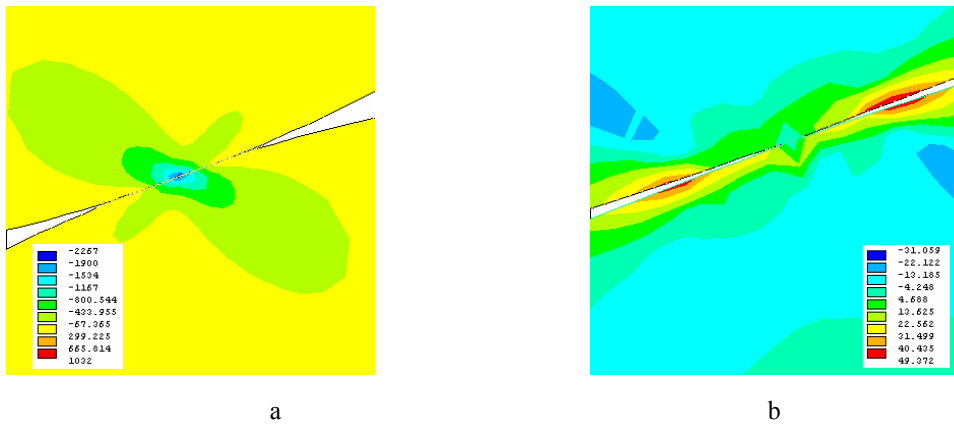


Figura 7 - Gráfico del contorno de las tensiones  $S_x$  con el par dentado:  
 a) cargado con  $F_n = 10700N$   
 b) descargado desde  $F_n = 10700N$

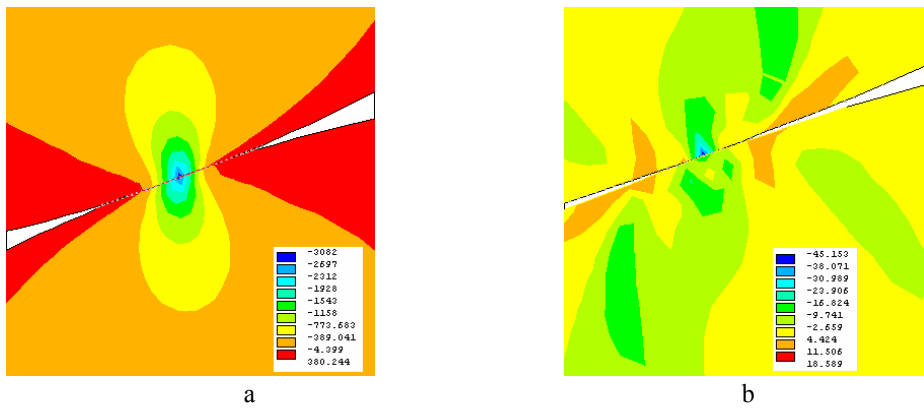


Figura 8 - Gráfico del contorno de las tensiones  $S_y$  con el par dentado:  
 a) cargado con  $F_n = 10700N$   
 b) descargado desde  $F_n = 10700N$

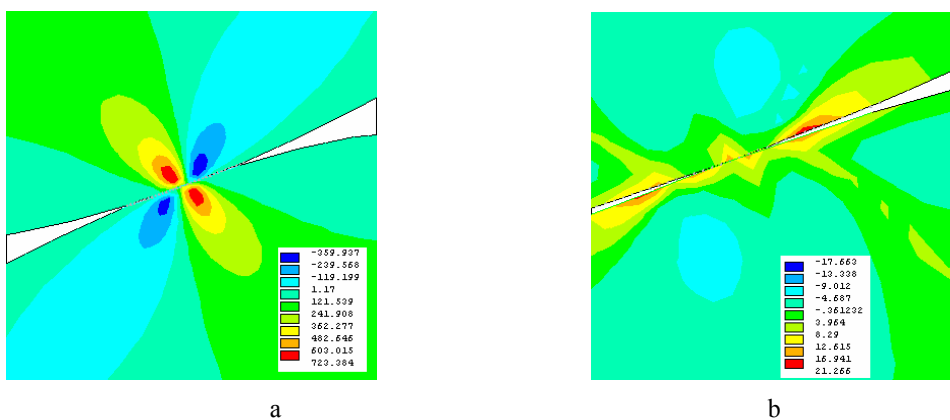


Figura 9 - Gráfico del contorno de las tensiones  $S_{xy}$  con el par dentado:  
 a) cargado con  $F_n = 10700N$   
 b) descargado desde  $F_n = 10700N$

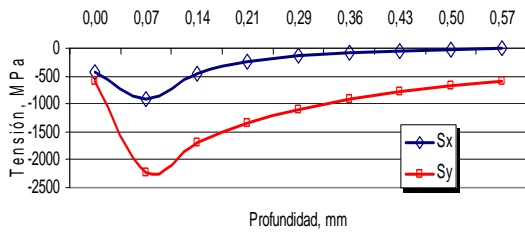


Figura 10 – Comportamiento de las componentes de la tensión en los nodos situados debajo del punto de contacto inicial con el par dentado cargado con  $F_n = 10700N$ .

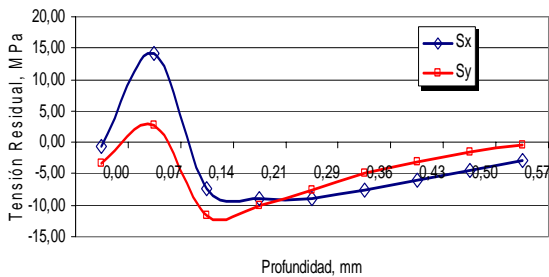


Figura 11 – Comportamiento de las componentes de la tensión en los nodos situados debajo del punto de contacto inicial con el par dentado descargado desde  $F_n = 10700N$ .

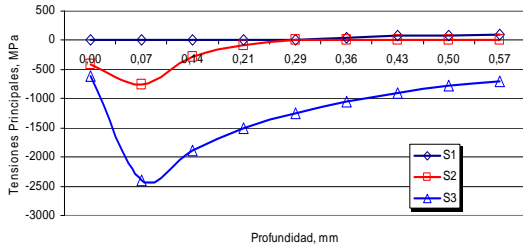


Figura 12 - Gráfico de las tensiones principales en los nodos situados debajo del punto de contacto inicial con el par dentado cargado (S1 corresponde a 10700N, S2 corresponde a 7560N y S3 corresponde a 5350N).

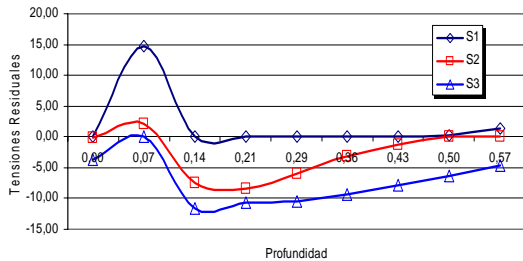


Figura 13. Gráfico de las tensiones principales en los nodos situados debajo del punto de contacto inicial con el par dentado descargado (S1 corresponde a 10700N, S2 corresponde a 7560N y S3 corresponde a 5350N).

#### 4. Conclusiones.

- El Método de los Elementos Finitos permite modelar los contornos para los desplazamientos normales y tangenciales al perfil del diente como funciones de la carga aplicada y luego removida y la localización con respecto al punto de contacto inicial, mostrando cómo la deformación cambia de elástica a elastoplástica en la medida que el material empieza a sobresalir hacia afuera en lugar de comprimirse.
- El comportamiento de las componentes del tensor de tensión y de las tensiones principales de los nodos subsuperficiales muestra el desarrollo de la distribución de tensión residual en la medida que crece la deformación plástica. Este desarrollo permitió predecir que en el caso estudiado la muestra cargada y descargada desde  $F_n = 5350N$  generó como promedio tensiones residuales de tracción en la capa superficial analizada lo que perjudica la resistencia de la capa al desgaste, y a la fatiga.
- Del mismo modo, el conocimiento del comportamiento de las tensiones de *Von Mises* permitió la apreciación del nuevo límite de fluencia.
- La versatilidad del Método de los Elementos Finitos, combinado con la reducción de la manufactura de prototipos a ser ensayados y mejorados de forma iterativa, contribuye significativamente a la reducción de los costos de la experimentación.

#### 5. Referencias.

1. Alfonso, E., *Apuntes sobre la interrelación entre la composición – microestructura - propiedades del acero*. Monografía. Universidad de Matanzas. 2002.
2. Barlat, F.; *Constitutive modeling for metals*. Advanced Methods in Material Forming. 2007.
3. Cotaquispe, L. O.; *Análisis del proceso de transmisión de la carga en un engranaje metálico de dientes rectos exteriores mediante la modelación*. Memorias de COMEC. UCLV. Las Villas, Noviembre 2006.
4. González Rey, G. et al. *El método de elementos finitos como alternativa en el cálculo de engranajes*. Ingeniería Mecánica, Vol. 5, n1, pp. 55-67. 2002.
5. González, O. y E. Alfonso. *Modelación de engranajes cilíndricos de dientes rectos. Una solución computarizada*. CD-ROM de Monografías. UMCC. 2006. [En línea] en <http://cict.umcc.cu/monografias/monos06.htm>

6. Hearn, E.J.; *Mechanics of Materials* (Third Edition) Volume 2, Butterworth-Heinemann, Woburn, MA (USA). 1997.
7. Jackson, R. L. et al.; *A finite element study of the residual stress and deformation in hemispherical contacts*. Transactions of the ASME. Vol. 127, July 2005
8. Nikolic-Stanojevic, V. and I. (Atanasovska) Cvejic.; *The analysis of contact stress on meshed teeth's flanks along the path of contact for a tooth pair*. Facta Universitatis, Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics Vol.3, No 15, 2003.
9. Wei, Zeping. Stresses and deformations in involute spur gears by finite element method", M.Sc. Thesis, Dept. of Mechanical Engineering, 2004, University of Saskatchewan.
10. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L.; *The finite element method* (Fifth Edition) - Volume 1: The Basis, Butterworth-Heinemann, Woburn, MA (USA), 2000.

## Analysis of stress generated field in the gear tooth flanks by Finite Element Method.

### Abstract:

Finite Element Method (FEM) is used in this study to model the contact in the gear tooth flanks. In the selection of the combined hardening described in this report was considerate a procedure of hardening directed to generate compression stress in the surface layers for improve the fatigue resistance of machine elements. In this paper are analyzed the following results: the transition from the elastic to elastoplastic deformation, the development of the residual stress distribution with increasing plastic deformation, determination of the complex stress field around the contact of a typical gear teeth during his functioning as well as the determination of local yield strength.

**Key words:** Gears, substructural hardening, plastic deformation, aging, Finite Element Method.

## 6ta Conferencia Internacional de Energía renovable, Ahorro de Energía y Educación Energética

Junio 9 - 12 de Junio 2009, Palacio de las Convenciones. Ciudad de La Habana, Cuba

### TEMAS PRINCIPALES

.....Por una cultura energética sustentable  
Energía Eólica y Solar, Combustibles, Medio Ambiente, Uso Racional de la Energía,  
Combustibles Alternativos, Tecnologías de Secado, Biomasa y Climatización, entre otros.

**Para enviar resúmenes o solicitar información adicional**

Comité Organizador CIER'2009  
Instituto Superior Politécnico *José Antonio Echeverría*  
Centro de Estudio de Tecnologías Energéticas Renovables  
Facultad de Ingeniería Mecánica  
Calle 127 s/n, CUJAE, Marianao 15, Ciudad de La Habana, Cuba  
E-mail: [sarmiento@ceter.cujae.edu.cu](mailto:sarmiento@ceter.cujae.edu.cu)  
[www.ciercuba.com](http://www.ciercuba.com)