

# Análisis de pérdida de estabilidad no lineal de elementos estructurales sometidos a compresión.

C. Fabré Sentile\*, M. Sánchez Noa\*\*, V. González Fernández\*\*, J. Wellesley-Bourke Funcasta\*\*, L. Ma. Veliz Marrero\*\*, Ma. E. García Domínguez\*\*, T. Rodríguez Delgado\*\*.

\*ALCOM, Ave. Independencia Km 31/2.

Municipio Cerro. Ciudad Habana. Cuba

E-mail: caryfabre@yahoo.ES

\*\*ISPJAE, Facultad de Ingeniería Mecánica. Dpto. Mecanica Aplicada.

Calle 114 No. 11901 e /119 y 127, Marianao, Cdad. Habana. Cuba

E-mail: vladimir@mecanica.cujae.edu.cu; msanchez@mecanica.cujae.edu.cu.

(Recibido el 15 de Julio del 2006, aceptado el 10 de Septiembre del 2006)

## Resumen.

En el presente artículo se muestra el análisis de pérdida de estabilidad en elementos estructurales delgados bajo compresión. Se realiza la exposición de las consideraciones del análisis lineal y no lineal de pérdida de estabilidad y se ejemplifica con una estructura modelada mediante elementos finitos, estableciéndose conclusiones interesantes.

**Palabras claves:** Estructuras esbeltas, estabilidad no-lineal, Euler.

## 1. Introducción.

El análisis de pérdida de estabilidad puede realizarse de dos formas:

- Análisis de pérdida de estabilidad lineal.
- Análisis de pérdida de estabilidad no lineal.

El análisis lineal de pérdida de estabilidad es conocido como pandeo clásico o de Euler [2, 4, 5, 6] (Figura 1) y es suficiente para algunas estructuras, pero un grado mayor de detalle y de amplificación de las tensiones actuantes se puede encontrar en un análisis no lineal.

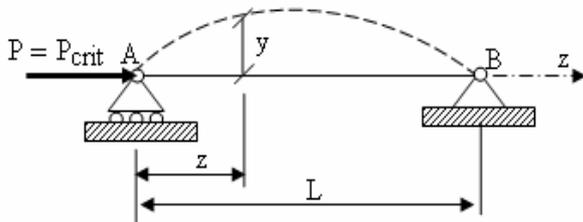


Figura 1. Problema clásico de Euler.

Vale destacar que, aunque a partir de la formula de Euler pueden obtenerse distintos valores de fuerza capaz de provocar pandeo, interesa únicamente el caso donde

el grado de estabilidad es  $n = 1$ , ya que los restantes valores de  $n$  dan fuerzas que corresponden a formas de equilibrio inestable; de manera que cuando:

$P < P_{crit}$  Sistema estable.

$P > P_{crit}$  Sistema inestable.

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E I_x}{(\mu L)^2} \quad (1)$$

Donde:

$P_{crit}$  Carga crítica de pérdida de estabilidad (Euler generalizado).

$I_x$  Momento de inercia de la sección.

$\mu$  Coeficiente de reducción de la longitud.

$L$  Longitud

$E$  Modulo de elasticidad del material.

Las técnicas de análisis de pérdida de estabilidad por pandeo incluyen:

- Análisis lineal de pandeo mediante autovalores.
- Análisis no lineal de pandeo.

El comportamiento de un elemento estructural bajo carga compresiva se muestra en la figura 2.

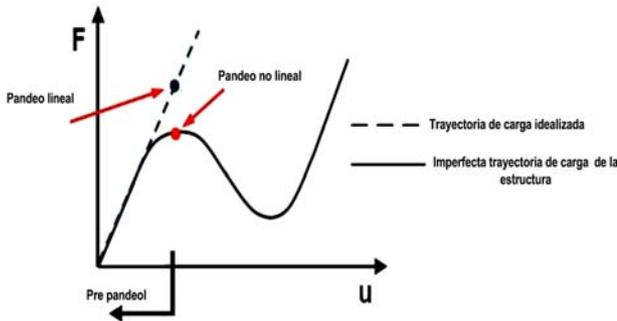


Figura 2.-Comportamiento de un elemento estructural bajo carga compresiva.

Un análisis de pérdida de estabilidad lineal se basa en un problema clásico de autovalores. Para desarrollar el problema de autovalores se debe, en primer lugar, resolver la relación carga-desplazamiento para un estado lineal de pre-pandeo  $\{P_0\}$ ; sea dado:

$$\{P_0\} = [K_e] \{u_0\} \tag{2}$$

Para obtener:

- $\{u_0\}$  - Desplazamientos resultantes de la carga aplicada  $\{P_0\}$
- $\{\sigma\}$  - La tensión resultante al aplicar el desplazamiento  $\{u_0\}$

Asumiendo que los desplazamientos en el pre-pandeo son pequeños, la ecuación de equilibrio incrementada en un estado arbitrario ( $\{P\}$ ,  $\{u\}$ ,  $\{\sigma\}$ ) viene dada por:

$$\{\Delta P\} = [ [K_e] + [K_\sigma(\sigma)] ] \{\Delta u\} \tag{3}$$

Donde:

- $[K_e]$  - Matriz rigidez
- $[K_\sigma(\sigma)]$  - Matriz de estado inicial evaluada en el estado tensional  $\{\sigma\}$

Asumiendo que el comportamiento pre-pandeo es una función lineal de la carga aplicada  $\{P_0\}$ , se tiene:

$$\{P\} = \lambda \{P_0\} \tag{4}$$

$$\{u\} = \lambda \{u_0\} \tag{5}$$

$$\{\sigma\} = \lambda \{\sigma_0\} \tag{6}$$

$\lambda$  - Autovalores

Entonces se puede demostrar que:

$$[K_\sigma(\sigma)] = \lambda [K_\sigma(\sigma_0)] \tag{7}$$

Así, la ecuación de equilibrio incrementada y expresada para el rango completo de pre-pandeo es:

$$\{\Delta P\} = [ [K_e] + \lambda [K_\sigma(\sigma_0)] ] \{\Delta u\} \tag{8}$$

Al establecerse la inestabilidad (es decir la carga crítica  $\{P_{cr}\}$ ), la estructura puede mostrar un cambio en la deformación  $\{\Delta u\}$  en el caso de que  $\{\Delta P\} \approx 0$

Al sustituir la expresión anterior en la ecuación previa de equilibrio incremental del rango de pre-pandeo se obtiene:

$$[ [K_e] + \lambda [K_\sigma(\sigma_0)] ] \{\Delta u\} = \{0\} \tag{9}$$

La expresión anterior representa el problema clásico de autovalores. Para poder satisfacer la relación anterior se debe tener:

$$\det [ [K_e] + \lambda [K_\sigma(\sigma_0)] ] = 0 \tag{10}$$

En un modelo de elementos finitos de  $n$  grados de libertad, las ecuaciones anteriores permiten obtener un polinomio de orden enésimo en  $\lambda$  (los autovalores). Los autovectores  $\{\Delta u\}_n$  en este caso, representan la deformación súperimpuesta sobre el sistema durante el pandeo. La carga crítica elástica  $\{P_{cr}\}$  esta dada para el valor mas bajo de  $\lambda$  calculado.

## 2. Análisis de pérdida de estabilidad no lineal.

La pérdida de estabilidad en casos de No-linealidades estructurales pueden deberse a 5 causas fundamentales:

- Debido a los materiales con comportamientos no-lineales. (No linealidades del material).
- A la geometría del modelo. (No- linealidades geométricas).
- Desplazamientos dependientes de condiciones de contorno. (No - linealidades de contacto).
- Cargas aplicadas dependientes de las condiciones de contorno.
- Al comportamiento y desarrollo de grietas en el material. (Mecánica de la Fractura).

Todas estas situaciones provocan que el grupo de ecuaciones de equilibrio (3) del sistema tenga un comportamiento no - lineal [3]. Esto se manifiesta, al ser abordado por el Método de los Elementos Finitos (MEF), porque la *matriz de rigidez global*  $[K]$  del sistema es variable durante la aplicación de las cargas externas. Esta es la causa en principio y en todos los casos, de las No-linealidades estructurales.

$$[P] = [K] * [u] \quad (11)$$

Donde:

[P]:- Vector fuerzas externas aplicadas en los *nodos* de los elementos.

[u]:- Vector desplazamientos de los *nodos*.

[K]:- Matriz de *rigidez global del sistema*.

El sistema de ecuaciones (11) se denomina *ecuaciones constitutivas* y constituye el modelo matemático del sistema analizado.

### 2.1 No-linealidad geométrica. Grandes desplazamientos.

Un caso de no-linealidad geométrica, pero con grandes desplazamientos, es el de un arco doblemente articulado, cargado transversalmente (Figura 3a). Se asumir  que el material permanece como *lineal y elástico* en todo momento, pero ocurrirá que según la carga vaya incrementándose, los desplazamientos en el arco se van convirtiendo lo suficientemente grandes como para producir cambios en la geometría, que influirán el análisis. Este es un problema con no-linealidad geométrica (NLG) con grandes desplazamientos.

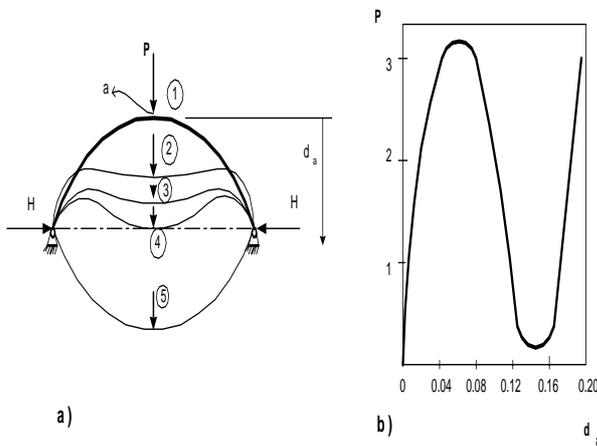


Figura 3- Desplazamientos de arco doblemente poyado.  
a) Esquema de análisis.  
b) Curva de fuerza – desplazamiento.

La asunción de comportamiento lineal conduce a resultados incorrectos del comportamiento del sistema. Desde el punto de vista estructural, el arco puede considerarse como una viga fina con una pequeña curvatura inicial y ha sido estudiado detenidamente por varios autores. De estos análisis se sabe que

inicialmente, bajo el incremento de la carga *P*, la acción es principalmente de flexión y el arco se deforma a través de las configuraciones 1 a la 4, de la figura 3a. Según la carga *P* continúa aumentando, las reacciones horizontales *H*, necesarias para el equilibrio, también aumentan. Entonces el arco puede ser considerado como una barra fina sometida a compresión axial, con una fuerza transversal en su medio, por lo que se trata ahora de un problema de pérdida de estabilidad estructural.

Poco después de la etapa 4, el arco comienza a ser inestable y se deforma aun bajo carga constante hacia la configuración 5, en lo que se conoce como un desplazamiento “snap – through”, luego del cual está apto para admitir nuevos incrementos de cargas. Si el desplazamiento en el punto medio *d\_a* entre las etapas 4 y 5 es controlado, el arco podrá pasar suavemente a través de su posición inestable. La Figura. 3b muestra la curva de carga en el medio del arco – desplazamiento del punto medio. La respuesta es casi cualquiera, excepto lineal.

Para resolver un problema de análisis no lineal generalmente en el programa es empleado el algoritmo de Newton-Raphson, que básicamente comprende [1]:

- Aplicación gradual en incrementos de la carga.
- Realizar iteraciones de equilibrio en cada paso de incremento de carga para llevar a la solución incrementada hacia el equilibrio (figura 4)
- Resolver la ecuación:  $[K_T] \cdot \{\Delta u\} = \{F\} - \{F^{nr}\}$
- Las iteraciones continúan hasta que la diferencia entre las cargas externas e internas ( $\{F\} - \{F^{nr}\}$ ) est  comprendida dentro de una tolerancia.

La expresión que relaciona este procedimiento se expresa a continuación.

$$[K_T] \cdot \{\Delta u\} = \{F\} - \{F^{nr}\} \quad (13)$$

Donde:

- [K\_T] - Matriz rigidez
- {Δu} - Incremento del desplazamiento
- {F} - Vector de carga externa
- {F<sup>nr</sup>} - Vector de fuerza interna.

### 3. Ejemplo de análisis de estabilidad de los elementos estructurales de una estructura tipo torre.

Este análisis esta dirigido a la comprobación de dos elementos de la estructura:

1-Columnas→Perfil Angular de 100x100x12 mm  
Longitud de 2.00 metros.

2- Diagonales→Perfil Angular de 75x75x8 mm  
Longitud de 2.4 metros

**3.1 Determinación de la carga axial en los elementos de la torre.**

En la figura 4 se muestra la modelación mediante elementos finitos de una torre de telecomunicación sujeta a cargas provocada por vientos de huracán de categoría 1. En la tabla 1 se muestra un resumen de valores máximos de carga axial compresiva en los elementos.

Tabla 1- Resumen de valores extremos de carga axial en elementos.

Estado de carga	Carga axial máxima (Newton)	
	Columna	Diagonal
Vientos tormenta tropical	179 754	35 192

**3.2 Carga crítica según Euler en la barra diagonal.**

Se obtiene la siguiente solución al problema lineal mediante el programa de elementos finitos.

\*\*\*LISTADO DE RESULTADOS\*\*\*

ESTADO APLICACION PASO DE CARGA  
1 1 34 597. N

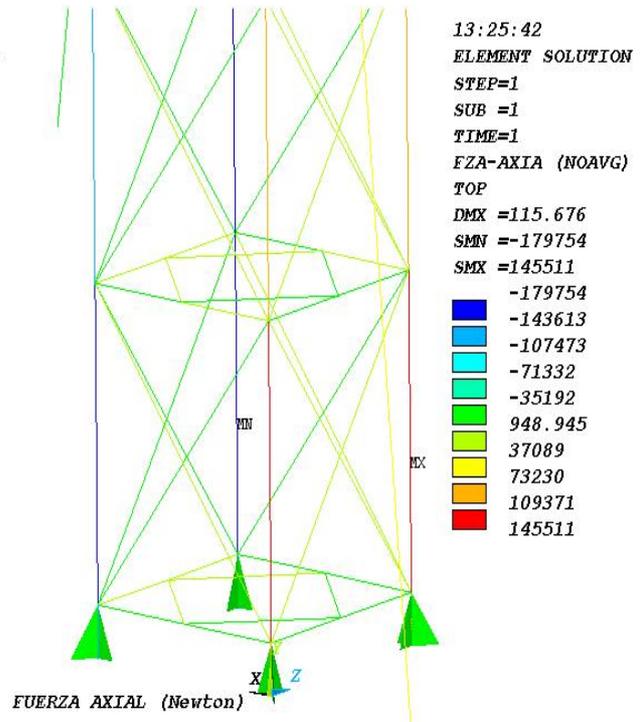
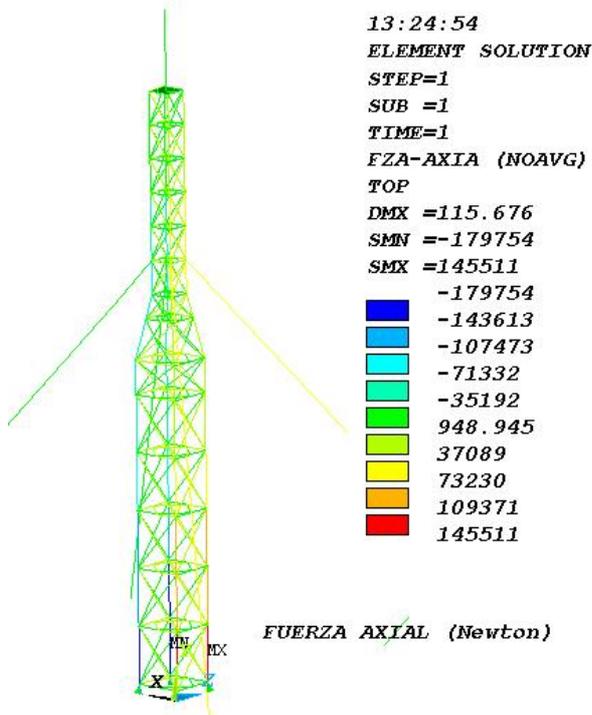


Figura 4.-Valores de carga axial en los elementos de la torre para el estado de carga provocados por vientos de tormenta tropical (Vientos máximos sostenidos entre 63 y 117 kilómetros por hora), con el sistema de antenas.

### 3.3 Carga crítica mediante análisis no lineal en la barra diagonal.

En la tabla 2 se muestran los valores de carga axial compresiva obtenidos durante el proceso de convergencia en la solución no lineal.

Tabla.2-Valores de carga durante proceso iterativo de solución no lineal para barra diagonal.

CONVERGENCIA	FY (Newton)
0.25000E-01	850.004
0.50000E-01	1700.01
0.87500E-01	2975.03
0.14375	4887.57
0.22813	7756.42
0.35469	12059.4
0.54453	18514.1
0.82930	<b>28 196.1</b>
0.90611	30807.9
0.95306	32403.9
0.97418	33122.2
0.98709	33561.1
1.0000	34000.0

En las figura 6 y 7 se muestran los gráficos obtenidos durante la solución del problema no lineal en la barra Diagonal.

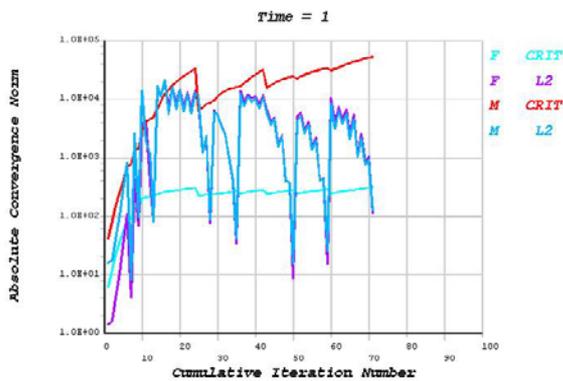


Figura 6.-Convergencia de solución del problema no lineal de la diagonal.

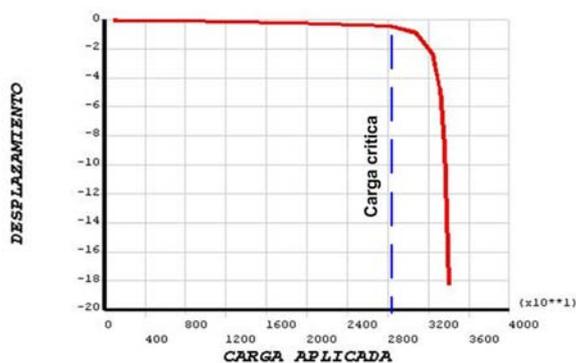


Figura 7- Solución a la carga crítica no lineal de la diagonal.

La carga crítica es de 28 196.1 Newton. El coeficiente de seguridad de pérdida de estabilidad ( $n_e$ ) es:

$$n_e = P_{CRIT} / P_{AXIAL MAX} \quad (14)$$

Según lo observado en la tabla 1 y el valor de la carga crítica de 28 196 N, existen problemas de pérdida de estabilidad en las diagonales ( $n_e < 1$ ) que conllevan al colapso de la misma, destacado en la tabla 3.

Tabla 3.-Valores de coeficiente de seguridad a estabilidad en la barra diagonal.

Estado de carga	Coeficiente de estabilidad $n_e$
Tormenta tropical	<b>0.8</b>

### 3.4 Carga crítica según Euler en la columna.

Se obtiene la siguiente solución al problema lineal mediante el programa de elementos finitos.

**\*\*LISTADO DE RESULTADOS\*\***

ESTADO	APLICACION	PASO DE CARGA
1	1	0.20544E+06 N

### 3.5 Carga crítica en la columna mediante análisis no lineal.

En la tabla 4 se muestran los valores de carga axial compresiva obtenidos durante el proceso de convergencia en la solución no lineal.

En las figura 8 y 9 se muestran los gráficos obtenidos durante la solución del problema no lineal en la barra Columna.

Tabla 4.-Valores de carga obtenidos durante el proceso iterativo de solución no lineal para la barra columna.

CONVERGENCIA	1 FY Newton
0.50000E-01	10250.3
0.10000	20500.8
0.17500	35877.1
0.28750	58942.9
0.45625	93544.1
0.70938	145422.
0.85469	<b>175 211.</b>
0.92008	188616.
0.96004	196808.
0.97802	200494.
0.98297	201508.
0.98791	202522.
0.99533	204043.
1.0000	205000.

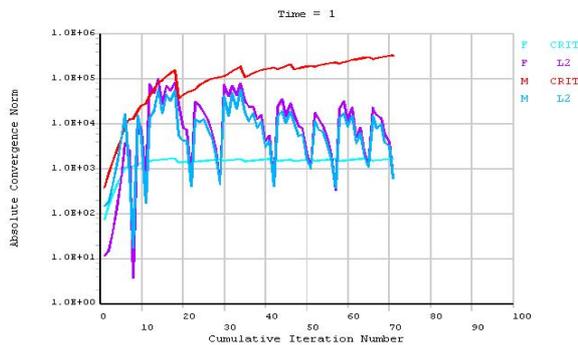


Figura 8.-Convergencia de solución no lineal de la columna.

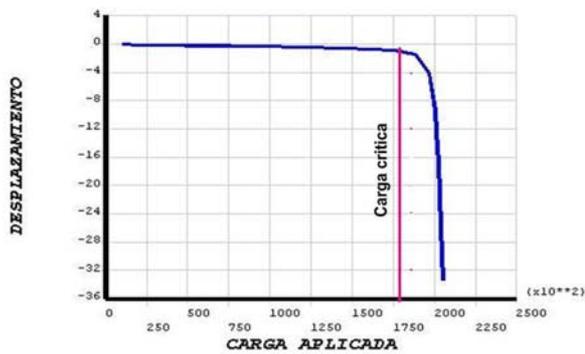


Figura 9- Solución a la carga crítica no lineal de la columna.

Se puede establecer que según lo observado en la tabla 1 y el valor de la carga crítica de 175 211 N que existen problemas de pérdida de estabilidad en las columnas de la estructura que conllevan al colapso de la misma, esto se puede observar en la tabla 5.

Tabla 5. Coeficiente de seguridad para vientos de Tormenta tropical.

Estado de carga	Coeficiente de seguridad de estabilidad $n_e$
Vientos tormenta tropical	0.97

## 2. Conclusiones.

El presente análisis de pérdida de estabilidad de perfiles delgados a compresión confirma la necesidad de la realización del análisis del comportamiento no lineal, contemplándose en este caso la no linealidad geométrica que caracteriza este tipo de elementos estructurales. En el caso objeto de estudio:

- Se obtuvo un valor de carga crítica de pérdida de estabilidad mediante análisis lineal en la barra diagonal y columna de 34 597 N y 205 440 N, respectivamente.
- Se obtuvo un valor de carga crítica de pérdida de estabilidad mediante análisis no lineal en la barra diagonal y columna de 28 196 N y 175 211 N, respectivamente.
- Es fácilmente observable la diferencia de valores en un tipo de análisis u otro según lo expuesto anteriormente, que permite ajustarse al comportamiento real.
- Se recomienda además la realización de análisis no lineal contemplando imperfecciones geométricas iniciales en los elementos estructurales.

## 3. Bibliografía.

1. BRONSHTEIN, I., SEMENDIEV, K, “Manual de Matemáticas para Ingenieros y estudiantes”, Editorial MIR, Moscú, 1987.
2. FEODOSIEV, V. I., “Resistencia de Materiales”, Editorial MIR, Moscú, 1985.
3. GARCIA de la Figal, J., “Introducción a los análisis no lineales estructurales”. ISPJAE. 2006.
4. PISARENKO, G. S., YAKOLEV, A. P., MATVEEV, V. V., “Manual de Resistencia de Materiales”, Editorial MIR, Moscú, 1985.
5. SHAMES, I. H., “Introduction to Solid Mechanics”, Prentice Hall Inc, 1975
6. TIMOSHENKO, S. P. and GERE, J. M., “Theory of Elastic Stability”, McGraw-Hill, New York, 1961.

## Slender structural elements non lineal stability analysis.

### Abstract:

Presently paper deals with stability analysis in structural elements. The considerations of lineal and non lineal analysis of stability are exposed and it is exemplified with a finite element structure model, settling down interesting conclusions.

**Key words:** Slender structures, non-linear stability, Euler.