

Ángulos de conos primitivos y relación de transmisión virtual en engranajes cónicos.

E. Mirabet Lemos , L. Martínez Delgado.*

Empresa Argelio Reyes (PRODAL)

*Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (CUJAE).

Facultad de Ingeniería Mecánica. Departamento de Mecánica Aplicada
calle 116 s/n, CUJAE, Marianao 15, Ciudad de la Habana, Cuba.

Teléfono: (537)-2663613

e.mail: luiscrisis@yahoo.com.mx, lmartinez@mecanica.cujae.edu.cu

(Publicado por primera vez en Ingeniería Mecánica Vol. 7, No. 3)

Resumen.

En el presente trabajo se realiza la deducción de expresiones generales para el cálculo de los semi-conos primitivos de los engranajes cónicos. Para dicha deducción se realiza un análisis geométrico mediante el empleo de cuatro paralelogramos rectangulares. Las expresiones determinadas pueden ser aplicadas a engranajes cónicos con un ángulo cualquiera entre sus ejes.

Palabras claves: Engranajes cónicos, conos primitivos, relación de transmisión.

1. Introducción.

Los engranajes cónicos pertenecen al grupo de las transmisiones espaciales y sirven para transmitir el movimiento entre árboles que se intersecan. El ángulo de intersección entre los árboles puede tomar un valor cualquiera. [1]

La cinemática de estas transmisiones está muy relacionada, como se verá en este trabajo, con los semi-ángulos de los conos primitivos δ_1 y δ_2 . El valor del ángulo sumario $\Sigma = \delta_1 + \delta_2$, da origen a tres casos típicos, de engranajes cónicos.

2. Caso 1: ($\Sigma < 90^\circ$)

Para analizar este caso se emplea la figura 1. En dicha figura, los triángulos 1 y 2 representan las proyecciones de los semi-conos primitivos del piñón y la rueda respectivamente.

La línea OB representa la generatriz común a ambos conos, y las líneas BA y BC representan los radios primitivos exteriores $\frac{d_{e1}}{2}$ y $\frac{d_{e2}}{2}$ del piñón y la rueda respectivamente. Además OA y OC representan las alturas de los conos primitivos.

Trazando por B una paralela a la altura OC del cono 2, y extendiéndola hasta una perpendicular a la altura OC en O, como muestra la figura 2. Observar que OA divide a la paralela a OC en los segmentos, BD y DF. Para simplificar las notaciones, se hace $X_2 = BD$ y $P_2 = DF$.

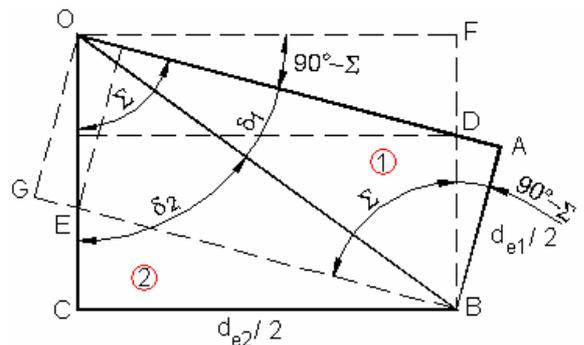


Fig. 1 Semi-conos primitivos con $\Sigma < 90^\circ$

Trazando por B, una paralela a la altura OA del cono 1, y extendiéndola hasta una perpendicular a la altura OC en O, como muestra la figura 2. Observar que OC divide a la paralela a OA en los segmentos, BE y EG. Para simplificar las notaciones, se hace $X_1 = BE$ y $P_1 = EG$.

Ahora se puede plantear las relaciones siguientes:

$$X_1 = \frac{d_{e2}}{2 \cdot \cos(90^\circ - \Sigma)} \quad (1)$$

$$P_1 = \frac{d_{e1}}{2} \cdot \tan(90^\circ - \Sigma) \quad (2)$$

$$X_2 = \frac{d_{e1}}{2 \cdot \cos(90^\circ - \Sigma)} \quad (3)$$

hace $X_1 = BG$ y $X_2 = BD$ así como $P_1 = EG$ y $P_2 = FD$.

Analizando la geometría descrita en este caso se pueden plantear las siguientes relaciones:

$$X_1 = \frac{d_{e2}}{2 \cdot \cos(\Sigma - 90^\circ)} \quad (12)$$

$$P_1 = \frac{d_{e1}}{2} \cdot \tan(\Sigma - 90^\circ) \quad (13)$$

$$X_2 = \frac{d_{e1}}{2 \cdot \cos(\Sigma - 90^\circ)} \quad (14)$$

$$P_2 = \frac{d_{e2}}{2} \cdot \tan(\Sigma - 90^\circ) \quad (15)$$

De forma compacta se puede escribir, (12) y (14) de la siguiente forma.

$$X_{1,2} = \frac{d_{e2,1}}{2 \cdot \cos(\Sigma - 90^\circ)} \quad (16)$$

También se puede expresar (13) y (15) de forma semejante.

$$P_{1,2} = \frac{d_{e1,2}}{2} \cdot \tan(\Sigma - 90^\circ) \quad (17)$$

Ahora se puede plantear para los ángulos δ_1 y δ_2 las siguientes expresiones:

$$\tan \delta_1 = \frac{d_{e1}}{2 \cdot (X_1 - P_1)} \quad (18)$$

$$\tan \delta_2 = \frac{d_{e2}}{2 \cdot (X_2 - P_2)} \quad (19)$$

De forma compacta se puede escribir, (18) y (19) De la siguiente forma.

$$\tan \delta_{1,2} = \frac{d_{e1,2}}{2 \cdot (X_{1,2} - P_{1,2})} \quad (20)$$

Sustituyendo (12) y (13) en (18) se tiene:

$$\tan \delta_1 = \frac{d_{e1}}{2 \cdot \left[\frac{d_{e2}}{2 \cdot \cos(\Sigma - 90^\circ)} - \frac{d_{e1}}{2} \cdot \tan(\Sigma - 90^\circ) \right]}$$

$$\tan \delta_1 = \frac{d_{e1}}{\frac{d_{e2}}{\cos(\Sigma - 90^\circ)} - d_{e1} \cdot \tan(\Sigma - 90^\circ)}$$

$$\tan \delta_1 = \frac{d_{e1}}{\frac{d_{e2}}{\cos(\Sigma - 90^\circ)} - \frac{d_{e1} \cdot \sin(\Sigma - 90^\circ)}{\cos(\Sigma - 90^\circ)}}$$

$$\tan \delta_1 = \frac{d_{e1} \cdot \cos(\Sigma - 90^\circ)}{d_{e2} - d_{e1} \cdot \sin(\Sigma - 90^\circ)}$$

$$\boxed{\tan \delta_1 = \frac{\cos(\Sigma - 90^\circ)}{U - \sin(\Sigma - 90^\circ)}} \quad (21)$$

Sustituyendo (14) y (15) en (19) se tiene:

$$\tan \delta_2 = \frac{d_{e2}}{2 \cdot \left[\frac{d_{e1}}{2 \cdot \cos(\Sigma - 90^\circ)} - \frac{d_{e2}}{2} \cdot \tan(\Sigma - 90^\circ) \right]}$$

$$\tan \delta_2 = \frac{d_{e2}}{\frac{d_{e1}}{\cos(\Sigma - 90^\circ)} - d_{e2} \cdot \tan(\Sigma - 90^\circ)}$$

$$\tan \delta_2 = \frac{d_{e2}}{\frac{d_{e1}}{\cos(\Sigma - 90^\circ)} - \frac{d_{e2} \cdot \sin(\Sigma - 90^\circ)}{\cos(\Sigma - 90^\circ)}}$$

$$\tan \delta_2 = \frac{d_{e2} \cdot \cos(\Sigma - 90^\circ)}{d_{e1} - d_{e2} \cdot \sin(\Sigma - 90^\circ)}$$

$$\boxed{\tan \delta_2 = \frac{U \cdot \cos(\Sigma - 90^\circ)}{1 - U \cdot \sin(\Sigma - 90^\circ)}} \quad (22)$$

4. Caso 3: ($\Sigma = 90^\circ$)

Este es un caso muy particular y se caracteriza porque $P_1 = P_2 = 0$ situación que se presenta cuando los árboles son perpendiculares uno respecto al otro. Este caso puede ser analizado empleando las fórmulas obtenidas, haciendo $P_1 = P_2 = 0$ en aquellas fórmulas que lo contengan.

En dicho caso $X_1 = \frac{d_{e2}}{2}$ y $X_2 = \frac{d_{e1}}{2}$

5. Generalización de los resultados.

Analizando las expresiones (9 y 20), para $\delta_{1,2}$ en cada uno de los casos, se puede expresar de forma más compacta los resultados obtenidos, para ambos casos, de la siguiente forma:

$$\tan \delta_{1,2} = \frac{d_{e1,2}}{2 \cdot (X_{1,2} \pm P_{1,2})} \quad (23)$$

$$X_{1,2} = \frac{d_{e2,1}}{2 \cdot \cos[\pm(90^\circ - \Sigma)]} \quad (24)$$

También se puede expresar de forma compacta $X_{1,2}$ y $P_{1,2}$ haciendo uso de las expresiones (5), (16) para $X_{1,2}$ y (6), (17) para $P_{1,2}$ como sigue:

$$P_{1,2} = \frac{de_{1,2}}{2} \cdot \tan[\pm(90^\circ - \Sigma)] \quad (25)$$

Haciendo uso de las expresiones (10) y (21) se puede expresar δ_1 de forma compacta, para los tres casos analizados, de la siguiente forma [4]:

$$\tan \delta_1 = \frac{\cos[\pm(90^\circ - \Sigma)]}{U \pm \sin[\pm(90 - \Sigma)]} \quad (26)$$

$$\tan \delta_2 = \frac{U \cdot \cos[\pm(90^\circ - \Sigma)]}{1 \pm U \cdot \sin[\pm(90 - \Sigma)]} \quad (27)$$

De la Teoría de las Máquinas y los Mecanismos se conoce que la relación de transmisión virtual, U_V para los engranajes cónicos viene dada por:

$$U_V = \frac{\tan \delta_2}{\tan \delta_1} \quad (28)$$

Sustituyendo (26) y (27) en la expresión anterior se obtiene una formulación de U_V , para los engranajes cónicos en general, en función de la relación de transmisión $U = \frac{Z_2}{Z_1}$ y Σ como se expresa a continuación:

$$U_V = \frac{\tan \delta_2}{\tan \delta_1} = \frac{U \cdot \cos[\pm(90^\circ - \Sigma)]}{1 \pm U \cdot \sin[\pm(90 - \Sigma)]} \cdot \frac{\cos[\pm(90^\circ - \Sigma)]}{U \pm \sin[\pm(90 - \Sigma)]}$$

Obteniéndose:

$$U_V = \frac{U^2 \pm U \cdot \sin[\pm(90 - \Sigma)]}{1 \pm U \cdot \sin[\pm(90 - \Sigma)]} \quad (29)$$

Esta relación de transmisión esta asociada al engranaje cilíndrico virtual o equivalente, empleada en los cálculos de resistencia de los engranajes cónicos. El procedimiento empleado se conoce como *aproximación de Tredgold* [2], [3]. En las fórmulas de la 21 a la 29, excepto la fórmula 28, se usará el signo (+) cuando $\Sigma \leq 90^\circ$ y el signo (-) cuando $\Sigma \geq 90^\circ$.

6. Conclusiones.

- La fórmula (29) es una expresión general para el cálculo de la U_V aplicable a todos los tipos de engranajes cónicos. La expresión se simplifica enormemente en el caso de los engranajes cónicos ortogonales, con $\Sigma = 90^\circ$ en que se obtiene que $U_V = U^2$.
- Las fórmulas (26) y (27) permiten calcular los ángulos de los semi-conos primitivos, en función de los mismos parámetros empleados para el cálculo de U_V . Se puede apreciar que cuando $\Sigma = 90^\circ$, caso 3, se tiene que $\tan \delta_1 = \frac{1}{U}$ y $\tan \delta_2 = U$
- El análisis geométrico realizado está basado en el empleo de cuatro paralelogramos rectangulares según se muestra en las figuras 1 y 2 vinculados con la geometría de los engranajes cónicos.
- Todos los paralelogramos se obtienen trazando paralelas a las líneas que definen la altura y los radios primitivos exteriores, de los engranes 1 y 2 respectivamente.

7. Bibliografía.

1. Yuri Golubev; Teoría de la Máquinas y Mecanismos. Ediciones R, CUBA, 1975.
2. G.Niemann; Tratado Teórico Práctico de Elementos de Máquinas. Editorial Labor, S.A. Barcelona, 1967.
3. F. Montoya; Error Calculation of Tredgold's approximation. The Theory of Machines and Mechanics. Proceeding of the 7th Word Congress. Sevilla, España, 1987.
4. Norma ISO 10300-1: 2001. Calculation of load capacity of bevel gears - Part1: Introduction and general influence factors

Pitch angles and gear ratio of virtual cylindrical gear on bevel gears.

Abstracts

In the present work, general relations for the calculation of pitch angles of bevel gears and gear ration of virtual cylindrical gear are given. For the mathematical processing is carried out a geometric analysis by means of four rectangular parallelograms. The found expressions can be applied to bevel gears with any shaft angles.

Key words: Bevel gear, pith angles, virtual ratio of transmission.

5to Congreso Cubano de Ingeniería Mecánica y Metalurgia.



Del 1^{ero} al 5 de diciembre del 2008 en La Habana, Cuba

TEMAS PRINCIPALES

- Mecánica Computacional, Biomecánica y las TIC en la Ingeniería Mecánica y Metalúrgica.
 - Mecatrónica y los Sistemas de Diseño y de Fabricación Avanzados
 - Gestión de Flota del Transporte
 - Energía y sus Tecnologías Emergentes
 - Materiales; Novedades y Tecnologías
 - Metalurgia y Procesos Metal-Mecánicos
 - Enseñanza de la Ingeniería Mecánica y Metalúrgica
 - Sistemas de Mantenimiento.
-

Para enviar resúmenes o solicitar información adicional

Visite el sitio WEB:

<http://www.cujae.edu.cu/mecanica/CCIM-2008>

O contactar al Comité Organizador en: **ccim@mecanica.cujae.edu.cu**