Establecimiento del cálculo del diámetro de cresta exterior de un engranaje cónico con técnicas de grafos.

G. González Rey.
Instituto Superior Politécnico *José Antonio Echeverría* (ISPJAE).
Facultad de Ingeniería Mecánica. Departamento de Mecánica Aplicada
Calle 116 s/n, CUJAE, Marianao 15, Ciudad de la Habana, Cuba.
Teléfono: (537)-2602267, Fax: (537)-2677129 E-mail: cidim@mecanica.cujae.edu.cu

(Publicado por primera vez en Ingeniería Mecánica Vol. 6, No. 3)

Resumen.

Mediante un modelo matemático son dadas las principales relaciones entre los parámetros geométricos básicos requeridos en la evaluación del diámetro de cresta exterior de un engranaje ortogonal de ruedas cónicas con dientes rectos y suma de correcciones radiales iguales a cero. Adicionalmente, serán brindados algunos resultados que asocian la correspondencia entre una geometría racional y la capacidad de carga de un engranaje cónico con restricciones del diámetro de cresta exterior. Para la determinación de los procedimientos de cálculo, los problemas planteados sobre los modelos matemáticos han sido serán representados por medio de grafos bicromáticos.

Palabras claves: Engranajes cónicos, diseño racional, modelo matemático.

1. Introducción.

Un análisis de las dimensiones exteriores de un engranaje cónico ortogonal permite definir el diámetro de cresta de la rueda como la principal magnitud que condiciona el tamaño del engranaje, las distancias de montaje y las dimensiones del soporte de la transmisión.

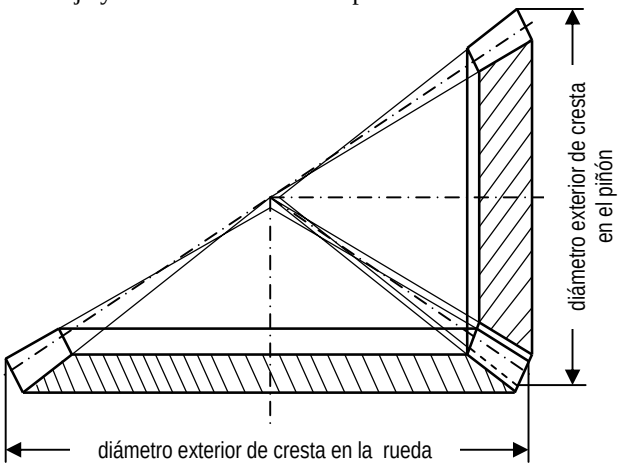

Figura 1.- Engranaje cónico ortogonal.

Una observación de los procedimientos de cálculo geométrico de engranajes cónicos ortogonales con dentado recto, revela que la determinación del diámetro de cresta exterior en la rueda (dae_2) implica la participación de algo más de 15 relaciones entre variables. Este hecho, ha condicionado que los estimados de los diámetros de cresta de las ruedas cónicas realizados por profesionales en el diseño de engranajes estén basados en el diámetro de referencia a la distancia cónica exterior, es decir:

$$dae_2 \approx de_2 = m_e \cdot z_2 \qquad \text{(mm)} \qquad [1]$$

Despreciar el aporte de la altura de la cabeza del diente en la dimensión del diámetro de cresta en la rueda cónica puede generar errores en el orden del 15 y hasta el 20%, mucho más significativo el error en caso de engranajes cónicos con relación de transmisión cinemática cercana a la unidad (u =1) y piñones con una cantidad pequeña de número de dientes (ver figura 2). Lamentablemente, estos casos son los más frecuentes en la industria actual y típicos de los engranajes cónicos empleados como re-envíos en ángulo.

El autor, pretende con este trabajo, brindar una relación práctica y exacta para estimar el valor del diámetro de cresta exterior de la rueda de un engranaje cónico ortogonal de dientes rectos. Para ello, se tomarán como datos iniciales los parámetros geométricos básicos y definidos en el diseño de estos engranajes.

© 2007 – Ediciones MECANICA.

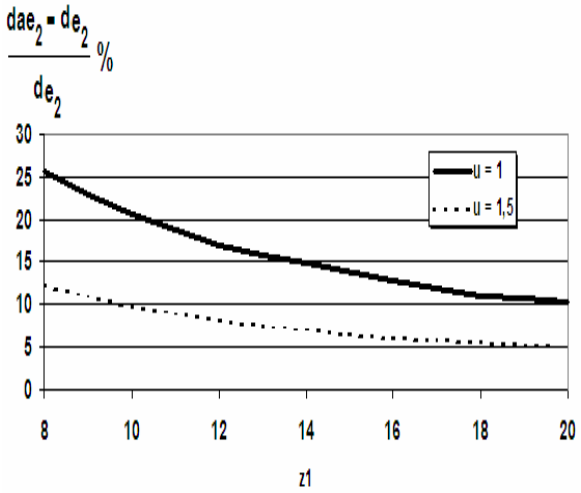

Figura 2 - Diferencia (en %) entre las dimensiones del diámetro de cresta exterior de la rueda (dae_2) y el diámetro de referencia exterior (de_2) en un engranaje cónico ortogonal de dientes rectos en dependencia del número de dientes (z_1)y la razón de engranaje (u),

2 - Modelo matemático.

El estudio de la geometría básica de los engranajes cónicos y la interrelación entre los parámetros geométricos básicos requeridos en la evaluación de la capacidad de carga de un engranaje cónico de dientes rectos permitió la confección de un modelo matemático de la geometría elemental de un engranaje cónico ortogonal de dientes rectos y con suma de las correcciones radiales iguales a cero [1]. Es necesario reconocer, que el modelo matemático presentado en este trabajo no corresponde con el originalmente presentado en el referido estudio [1], pues con el objetivo de esclarecer la presentación de los resultados no han sido consideradas las relaciones que implican las limitaciones de soluciones compatiblemente funcionales como son el coeficiente de recubrimiento, el espesor de cabeza del diente y la interferencia de los perfiles activos.

Modelo matemático de la geometría básica de un engranaje cónico ortogonal de dientes rectos.

[R1] $$\tan^{-1}\left(\frac{1}{u}\right)+\delta_2-90^\circ=0$$

[R2] $$x_{hm2}+x_{hm1}=0$$

[R3] $$d_{e2}-m_e\cdot z_1\cdot u=0$$

[R4] $$2\cdot R_e\cdot \operatorname{sen}\delta_2-d_{e2}=0$$

[R5] $$b-\Psi_{bre}\cdot R_e=0$$

[R6] $$R_m-R_e+0{,}5\cdot b=0$$

[R7] $$\frac{m}{m_e}-\frac{R_m}{R_e}=0$$

[R8] $$h_{fm1}+xhm_1\cdot m-(ha^*+c^*)\cdot m=0$$

[R9] $$h_{am2}-xhm_2\cdot m-ha^*\cdot m=0$$

[R10] $$h_{ae2}-h_{am2}-\frac{b\cdot hfm_1}{2\cdot R_m}=0$$

[R11] $$h_{am1}-x_{hm1}\cdot m-ha^*\cdot m=0$$

[R12] $$d_{m1}-m\cdot z_1=0$$

[R13] $$d_{ae2}-d_{e2}-2\cdot h_{ae2}\cdot\cos\delta_2=0$$

Nota: Cantidad de variables en el modelo = 20

Variables del modelo:
u : Razón de engranaje.
m_e : Módulo exterior (mm).
z_1 : Número de dientes en el piñón.
x_{hm1} : Coeficiente de corrección radial en el piñón a la distancia cónica media.
h_a^* : Factor de altura de la cabeza del diente.
c^* : Factor de holgura radial en el engranaje.
ψ_{bre} : Relación entre el ancho de engranaje y la distancia cónica exterior.
m : Módulo medio (mm).
b : Ancho de los dientes. Se considera igual al ancho del engranaje (mm).
h_{am2} : Altura media de cabeza del diente en rueda (mm).
h_{fm1} : Altura media del pie del diente en piñón (mm).
x_{hm2} : Coeficiente de corrección radial en la rueda a la distancia cónica media.
R_e : Distancia cónica exterior (mm).
R_m : Distancia cónica media (mm).
d_{ae2} : Diámetro de cresta exterior de la rueda (mm)
d_{e2} : Diámetro de referencia exterior de la rueda (mm)
h_{ae2} : Altura exterior de cabeza del diente en rueda (mm)
δ_2 : Ángulo del semicono de referencia en la rueda
h_{am1} : Altura media de cabeza del diente en el piñón (mm).
d_{m1} : Diámetro medio del piñón (mm).

Para definir el procedimiento de cálculo, el problema de la determinación del diámetro de cresta de la rueda será representado por medio de grafos bicromáticos, donde los vértices que representan a las variables tendrán un círculo con espesor menor y los vértices que representan a las relaciones tendrán un círculo con espesor mayor, los vínculos entre las relaciones y las variables se establece por cuerdas (segmentos de rectas), esta técnica es descrita en [2].

En la figura 5, se presenta el grafo del modelo matemático de la geometría básica de un engranaje cónico ortogonal de dientes rectos.

En la figura 6, se muestra el grafo del modelo matemático de la geometría básica de un engranaje cónico ortogonal de dientes rectos con identificación de las variables de entrada del problema declarado (*u, z_1, me, xhm_1, ha*, c*, ψbre*) y la variable esperada de resultado (*dae_2*).

En la figura 7, es dado el grafo del problema sin orientación de procedimiento. Nótese que en el mencionado grafo han sido eliminadas las variables datos y las cuerdas que las vinculaban con la relaciones. Aún no han sido orientados los segmentos (cuerdas sin saetas) por lo que no se ha definido aún el procedimiento para el cálculo del diámetro de cresta exterior de la rueda de un engranaje cónico de dientes rectos (*dae_2*) estableciendo como datos las variables *u, z_1, me, . xhm_1, ha*, c*, ψbre*.

Finalmente, en la figura 8, se muestra el grafo del problema con orientación de procedimiento (pareo) mediante el seguimiento de las saetas. Debe llamarse la atención sobre la eliminación de las relaciones *R11* y *R12* y las variables *dm1* y *ham1* por no aportar nada a la solución del problema.

A manera de resumen, es brindada la organización general del procedimiento de cálculo de la geometría básica de un engranaje cónico ortogonal de dientes rectos para evaluar el diámetro de cresta exterior de la rueda.

Datos del problema [cantidad = 7]:

u : Razón de engranaje.
m_e : Módulo exterior (mm).
z_1 : Número de dientes en el piñón.
x_{hm1} : Coeficiente de corrección radial en el piñón.
h_a^* : Factor de altura de la cabeza del diente.
c^* : Factor de holgura radial en el engranaje.
ψ_{bre} : Relación entre el ancho de engranaje y la distancia cónica exterior.

Orden de cálculo.

a) [R2] $x_{hm2} = -x_{hm1}$

b) [R1] $\delta_2 = 90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{1}{u}\right)$

c) [R3] $d_{e2} = m_e \cdot z_1 \cdot u$

d) [R4] $R_e = \frac{d_{e2}}{2 \cdot \mathrm{sen}\delta_2}$

e) [R5] $b = \Psi_{bre} \cdot R_e$

f) [R6] $R_m = R_e - 0{,}5 \cdot b$

g) [R7] $m = \frac{R_m}{R_e} \cdot m_e$

h) [R8] $h_{fm1} = (ha^* + c^*) \cdot m - xhm_1 \cdot m$

i) [R9] $h_{am2} = xhm_2 \cdot m + ha^* \cdot m$

j) [R10] $h_{ae2} - h_{am2} - \frac{b \cdot hfm_1}{2 \cdot R_m} = 0$

k) [R13] $d_{ae2} = d_{e2} + 2 \cdot h_{ae2} \cdot \cos\delta_2$

3 - Fórmula para el cálculo del diámetro de cresta exterior.

Un análisis del modelo matemático del problema antes presentado demuestra que es posible obtener una relación entre las variables definidas en el conjunto de datos y el conjunto de salida del problema. Un adecuado tratamiento matemático, permitió la deducción de la fórmula (2) para determinar el diámetro de cresta exterior de una rueda cónica de dientes rectos en un engranaje ortogonal con suma de las correcciones radiales iguales a cero.

Un estudio de la formula (2), permite concluir que el primer sumando tiene una significativa influencia en la magnitud del diámetro de cresta exterior de la rueda. Coincidentemente, los términos que componen el primer sumando tienen una marcada influencia en la capacidad de carga del engranaje según las normas AGMA [3] e ISO [4] , lo cual pudo ser comprobado en un anterior trabajo [1] durante evaluaciones de engranajes cónicos con igual diámetro de cresta pero diferentes combinaciones de módulo exterior y número de dientes.

La figura 3 muestra con un ejemplo, de los varios observados en el trabajo [1], como varía la capacidad de carga de un engranaje cónico de dientes rectos según diferentes combinaciones de módulo exterior y número de dientes del piñón. Esta cualidad, exige ser cuidadoso en la selección de la combinación del número de dientes del piñón y el módulo exterior del engranaje, pues diferentes variantes permiten obtener igual magnitud de diámetro de cresta exterior y diferentes niveles de resistencia.

$$d_{ae2} = z_1 \cdot m_e \cdot u + 2 \cdot m_e \cdot \left(h_a^* + 0{,}5 \cdot \Psi_{bre} \cdot c^* - x_{hm1} \right) \cdot \cos\left[90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{1}{u} \right) \right] \quad \text{(mm)} \qquad (2)$$

Por otro lado, el factor de altura del diente (ha*) y la corrección radial (xhm1) influyen significativamente en los esfuerzos de contacto y por ende en el nivel de resistencia del engranaje. La figura 4 brinda un ejemplo de los niveles de capacidad de carga de un engranaje cónico de dientes rectos con razón de engranaje igual a 2 e igual diámetro de cresta exterior en la rueda, para diferentes valores del coeficiente de corrección radial y del factor de altura del diente.

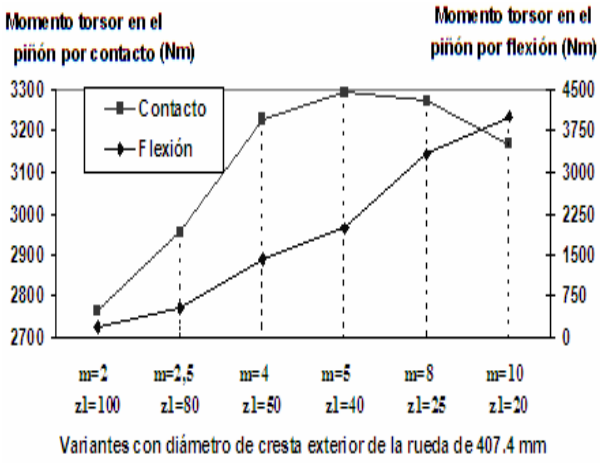

Figura 3 - Engranajes cónicos ortogonales de dientes rectos cementados, con razón de engranaje igual a 2 e igual diámetro de cresta exterior en la rueda. Torque calculado según ISO/DIS 10300 [4].

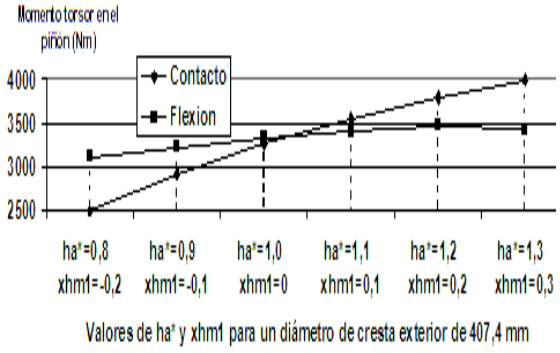

Figura 4.- Variación de la capacidad de carga de varios engranajes cónicos ortogonales de dientes rectos cementados, con razón de engranaje igual a 2 e igual diámetro de cresta exterior en la rueda. Torque calculado según ISO/DIS 10300 [4].

4. Conclusiones.

Fue elaborado un modelo matemático de la geometría de un engranaje cónico de dientes rectos, con suma de las correcciones radiales iguales a cero. Del análisis numérico y cualitativo de las relaciones matemáticas se derivaron algunas conclusiones significativas:

- Un adecuado tratamiento matemático, permitió la deducción de una fórmula para determinar el diámetro de cresta exterior de una rueda cónica de dientes rectos en un engranaje ortogonal con suma de las correcciones radiales iguales a cero a partir de parámetros geométricos usualmente analizados como parámetros de diseño.
- Despreciar el aporte de la altura de la cabeza del diente en la dimensión del diámetro de cresta en la rueda cónica puede generar errores en el orden del 15 y hasta el 20%, mucho más significativo el error en caso de engranajes cónicos con relación de transmisión cinemática cercana a la unidad (u =1) y piñones con una cantidad pequeña de número de dientes.
- Aunque el factor de altura del diente y el coeficiente de corrección radial tienen poca incidencia en la magnitud del diámetro de cresta exterior, en engranajes de iguales dimensiones exteriores influyen significativamente en los esfuerzos de contacto y por ende en el nivel de resistencia del engranaje.

5. Bibliografía.

1 – González Rey, G., Síntesis geométrica de engranajes cónicos de dientes rectos. Tesis de Doctorado. Ciudad de la Habana. CUJAE 1998.

2 - Martínez Escanaverino, J., y otros, ¨ Algorítmica del diseño mecánico ¨, Ingeniería Mecánica, Vol. 0, N°1, 1997.

3 - Norma AGMA 2003-B86, Rating the pitting resistance and bending strength of generated straight bevel, Zerol bevel, and spiral bevel gear teeth. Virginia, EUA, 1991.

4 - Norma ISO/DIS 10300.1,2,3 y 5. Calculation of load capacity of bevel gears, ISO TC60-WG6, Alemania.1996

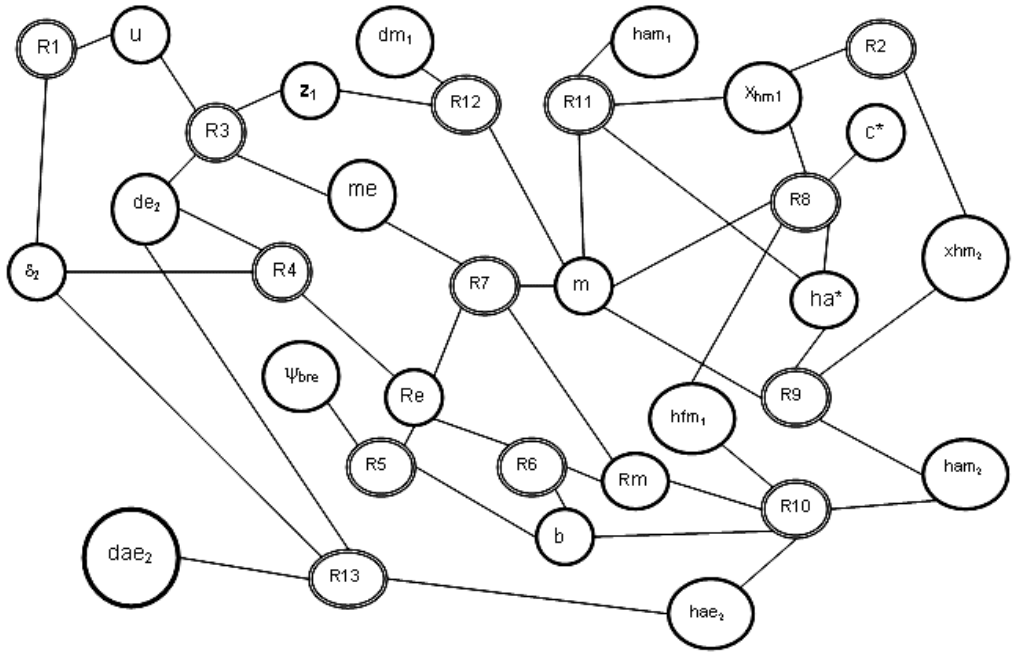

Figura 5 - Grafo del modelo matemático de la geometría básica de un engranaje cónico ortogonal de dientes rectos.

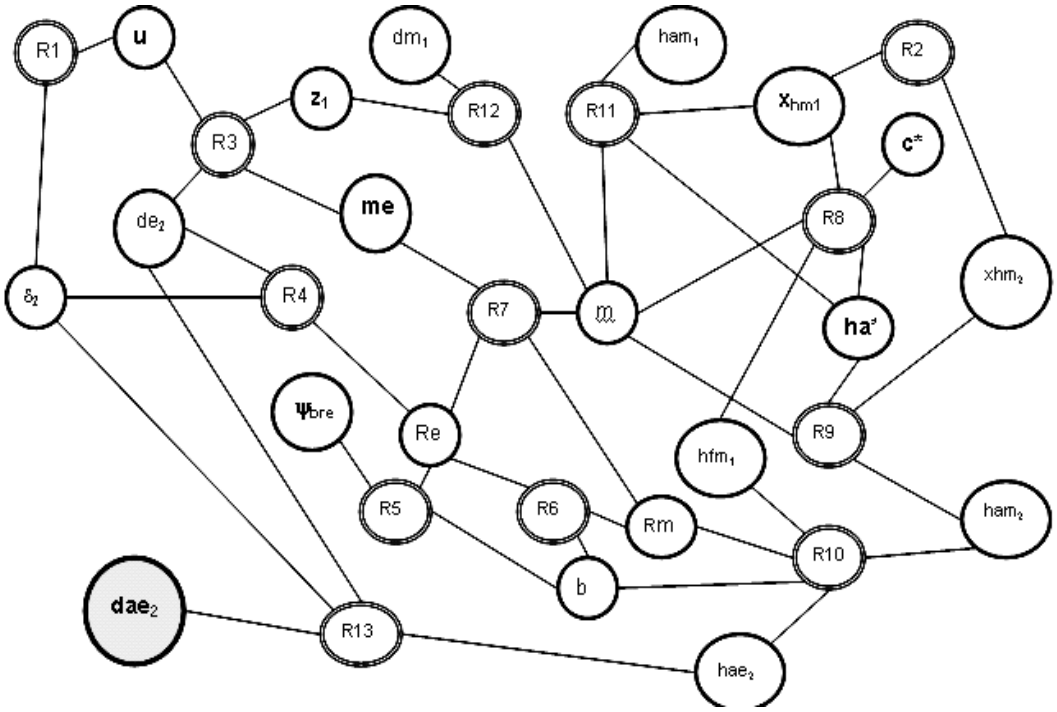

Figura 6 - Grafo del modelo matemático de la geometría de un engranaje cónico ortogonal de dientes rectos con identificación de las variables de entrada al problema (u, z_1, me, . xhm_1, ha*, c*, ψbre) y la variable esperada de resultado (dae_2).

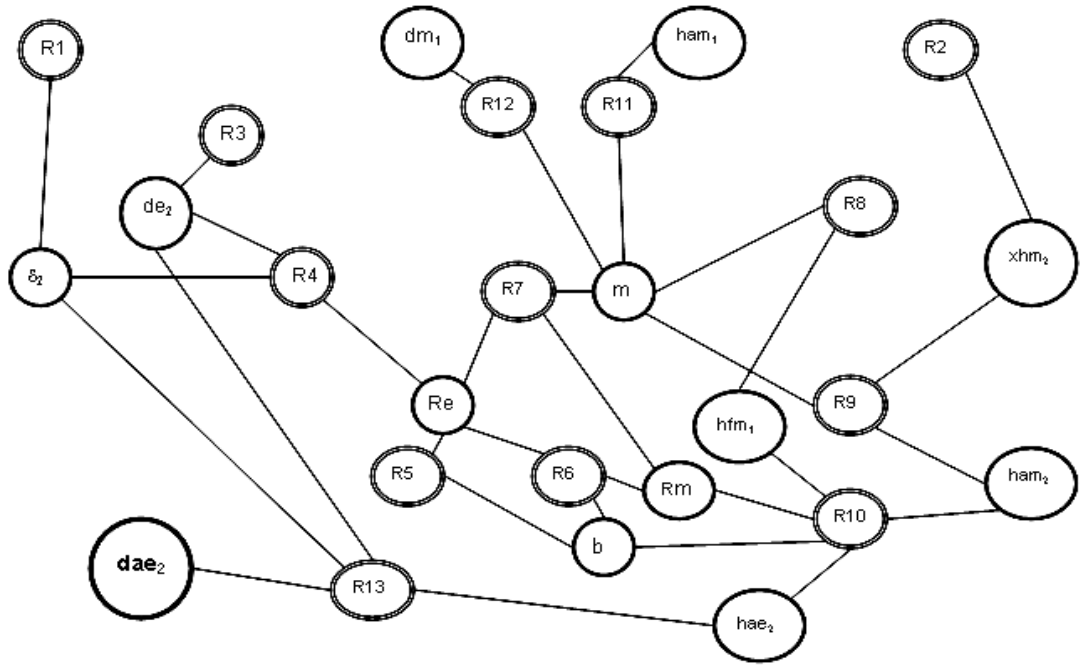

Figura 7- Grafo del problema sin orientación de procedimiento (no pareo): Cálculo del diámetro de cresta exterior de la rueda de un engranaje cónico de dientes rectos (*dae*$_2$) estableciendo como datos las variables *u, z*$_1$*, me, . xhm*$_1$*, ha*, c*, ψbre*.

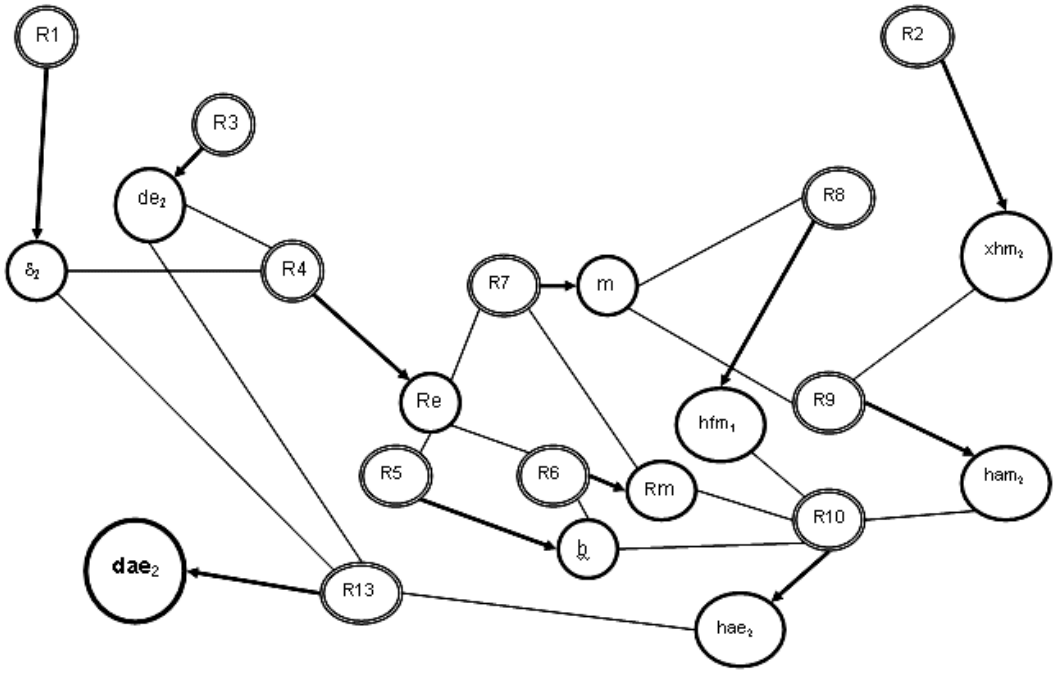

Figura 8 - Grafo del problema con orientación de procedimiento (pareo): Cálculo del diámetro de cresta exterior de la rueda de un engranaje cónico de dientes rectos (*dae*$_2$) estableciendo como datos las variables *u, z*$_1$*, me, xhm*$_1$*, ha*, c*, ψbre*. Nótese que las relaciones *R11* y *R12* y las variables *dm1* y *ham1* no son necesarias para la solución

Procedure for the calculation of outer tip diameter on straight bevel gear by means of graphs technique.

Abstract:

By means of a mathematical model, the main relations for the evaluation of the outer tip diameter on straight bevel gear with sum of the profile shift coefficients equal to zero are given. Additionally, some results associated with a rational geometry and high load capacities of straight bevel gear with restrictions in the outer tip diameter are presented. For the determination of the calculation procedures based on mathematical models was used the technique of representation by means of graphs.

Key words: Straight bevel gear, rational design, mathematical models, graphs technique.

5to Congreso Cubano de Ingeniería Mecánica y Metalurgia.

Del 1ero al 5 de diciembre del 2008 en La Habana, Cuba

TEMAS PRINCIPALES

- Mecánica Computacional, Biomecánica y las TIC en la Ingeniería Mecánica y Metalúrgica.
- Mecatrónica y los Sistemas de Diseño y de Fabricación Avanzados
- Gestión de Flota del Transporte
- Energía y sus Tecnologías Emergentes
- Materiales; Novedades y Tecnologías
- Metalurgia y Procesos Metal-Mecánicos
- Enseñanza de la Ingeniería Mecánica y Metalúrgica
- Sistemas de Mantenimiento.

Para enviar resúmenes o solicitar información adicional

Visite el sitio WEB: http://www.cujae.edu.cu/mecanica/CCIM-2008

O contactar al Comité Organizador en: ccim@mecanica.cujae.edu.cu