

# Modelo matemático y procedimiento para la generación gráfica de los contornos de dientes de engranajes cilíndricos.

**G. González Rey\*, R. José García Martín\*\*, P. Frechilla Fernández\*\***

\*Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (ISPJAE).

Facultad de Ingeniería Mecánica. Departamento de Mecánica Aplicada

Calle 116 s/n, CUJAE, Marianao 15, Ciudad de la Habana, Cuba.

Teléfono: (537)-2663607 E-mail: cidim@mecanica.cujae.edu.cu

\*\*Universidad de Salamanca Escuela Politécnica Superior de Zamora.

Departamento de Ingeniería Mecánica. Ave. Requejos 33, Zamora. España.

E-mail: toles@usal.es, pf2@usal.es

(Recibido el 21 de Junio de 2005; aceptado el 27 de Agosto de 2005)

## Resumen.

El presente trabajo de desarrollo está dirigido a brindar un modelo matemático que permita el perfeccionamiento del cálculo de la capacidad de carga de los engranajes cilíndricos con empleo del método de los elementos finitos. El procedimiento está basado en un modelo matemático del lugar geométrico de los puntos del contorno de los dientes en coordenadas polares. La base del procedimiento considera una geometría precisa de los flancos de los dientes y toma en cuenta la influencia de la herramienta de generación de los flancos y la posibilidad de modificación del perfil del diente, con el distintivo interés y actualidad de potenciar el perfeccionamiento de la evaluación de los esfuerzos en los dientes de ruedas dentadas en las investigaciones asociadas con la valoración de la capacidad de carga de los engranajes cilíndricos

**Palabras claves:** Engranajes cilíndricos, flanco del diente, modelo matemático, método de elementos finitos.

## 1. Introducción.

Desde sus inicios, el desarrollo de las computadoras electrónicas ha influido en gran medida en los procedimientos de cálculo empleados en los engranajes. El advenimiento de las computadoras electrónicas, propició que diferentes programas de computación [1] basados en normas y procedimientos establecidos prácticamente, sustituyeran las tablas y reglas de cálculo empleadas en el diseño de los engranajes durante años, permitiendo un sustancial aumento de la rapidez y precisión de los cálculos.

En la década del 90, la introducción de poderosos medios de cómputos con elevadas velocidades de cálculo permite una consolidación vertiginosa de las técnicas de análisis numérico, como lo demuestran los trabajos de López [2], Fuentes [3], González-Rey [4], [5], Tennyson [6] y Sfakiotakis [7]. El auge alcanzado por las técnicas de computación y el empleo de las nuevas computadoras con procesadores matemáticos cada vez más veloces, posibilitan incluir las nuevas técnicas CAD como nuevas y efectivas herramientas de diseño y cálculo de engranaje.

Por otro lado, es evidente que el desarrollo de la ingeniería de engranajes plantea el desarrollo de mejores modelos para el análisis de la capacidad de trabajo de las ruedas dentadas como una de sus principales prioridades. Desde los primeros trabajos de Hertz, Lewis [8] y Block [9], bases de los actuales criterios de comprobación de la resistencia de los dientes alariado, a la fractura y al desgaste adhesivo, las mejoras de los procedimientos de cálculo y los modelos de análisis han sido los objetivos fundamentales de numerosas investigaciones en la ingeniería de engranajes. Una referencia de tal afirmación puede ser, la propia evolución de la norma ISO 6336-3 (para el caso de evaluación de los esfuerzos en la base del diente) que fue derivando desde la primera propuesta en 1960. (emitida por la delegación alemana) con la consideración de un esfuerzo equivalente en el fondo del diente a partir de una carga en la cresta del diente y la determinación de la zona crítica mediante tangentes a 30°, hasta las más recientes propuestas de modelo con una carga en el diente aplicada en la zona que inicia el contacto un solo par de diente en la línea práctica de engranaje y una muy bien definida concentración de la carga

en el fondo del diente producto del tallado por generación con herramientas de corte con protuberancias en sus extremos.

En este sentido, el presente trabajo de investigación, dirigido a perfeccionar el modelo y las formulaciones para el cálculo de la capacidad de carga de los engranajes cilíndricos con empleo del método de los elementos finitos y el desarrollo matemático de una geometría precisa de los flancos de los dientes, presenta un distintivo interés y actualidad en las investigaciones asociadas con el perfeccionamiento de la evaluación de los esfuerzos en los dientes de los engranajes cilíndricos.

## 2. La ingeniería de engranaje y el método de elementos finitos.

La ingeniería de engranaje y sus estudios teóricos-prácticos no han estado ajenos a la actual difusión del Método de los Elementos Finitos (MEF). Publicaciones referidas a la implementación del Método de los Elementos Finitos en el estudio de los elementos de máquinas [10], [11], y en particular en los engranajes, dan muestra de la alternativa de este método como herramienta potencial para el estudio de los engranajes.

Las posibilidades del método de elementos finitos para analizar los fenómenos de contacto han sido empleadas para modelar las deflexiones de los dientes y las huellas del contacto entre dientes de engranajes metálicos [12] y no metálicos [13]. Un aspecto importante en la valoración de la deflexión de los dientes y por consiguiente en el reparto de la carga ha promovido la modelación del contacto entre dientes del engranaje. Por este motivo, uno de los usos más frecuentes del método de los elementos finitos en el estudio de los engranajes ha estado dirigido a la simulación del proceso de engrane entre ruedas dentadas incorporando variables asociadas a la distribución de la carga entre dientes y al efecto que producen los errores de fabricación en la transmisión de la carga.

Los estudios por modelación y simulación de las uniones de las ruedas dentadas a los árboles y ejes han sido realizados con empleo del método de los elementos finitos. Las ventajas del MEF han sido decisivas en los nuevos resultados que se ofrecen, en particular cuando se requiere estudiar la distribución de los esfuerzos en los concentradores de tensión por forma de las entalladuras. Las uniones por chavetas [14], con apriete [15] y con uniones estriadas [16] han sido objetos de nuevos estudios a partir de las ventajas que ofrece el MEF.

Otro empleo del MEF en los engranajes se asocia al estudio de las vibraciones mecánicas producto de los errores de fabricación, de alineación en el montaje y de su interrelación con otros componentes de máquinas [17], [18]. La vibración y el ruido de un sistema de engranaje en marcha también han sido valorados por el MEF [19]. En general, estos estudios son necesarios para comprender las

características de excitación y valorar el comportamiento dinámico de los sistemas de engranajes.

Como es conocido, la capacidad de trabajo de un engranaje se caracteriza por su resistencia mecánica a los esfuerzos producidos por las cargas actuantes. Dentro de estos esfuerzos, tienen marcada importancia los esfuerzos en la base de los dientes. Muchas decisiones de diseño óptimo estiman la necesidad de lograr una máxima capacidad de resistencia mecánica con una reducción del tamaño y peso de las ruedas. Por tales motivos, uno de los empleos más evidente del MEF en el estudio de los engranajes corresponde al análisis de los esfuerzos en la base de los dientes con análisis de la redistribución de la carga en el flanco de los dientes y su efecto en los esfuerzos de flexión en el fondo del diente. Contrariamente, a lo que puede ser supuesto, la valoración de los esfuerzos en la base de los dientes de las ruedas dentadas no es un tema totalmente logrado con el MEF, pues requiere una precisión de la forma del diente en su parte inferior, correspondiente con la zona donde ocurren los mayores esfuerzos de flexión.

En la ingeniería de engranaje existe amplia información sobre la curva *evolvente* que forma el flanco activo de un diente de engranaje, sin embargo, la curva que define la zona de redondeo del pie del diente, cuando éste es fabricado por generación, es mucho menos tratada en la literatura especializada, esta situación no ha favorecido los estudios de los esfuerzos en la base de los dientes por el MEF debido al inconveniente que introduce la modelación matemática del perfil del fondo del diente. A pesar de esta situación, se aprecian recientes trabajos en la aplicación del MEF para estudiar los esfuerzos en el fondo del diente de las ruedas dentadas de engranajes [20], [21], [22].

En el 2001, motivados por las innegables ventajas que ofrece el MEF y la necesidad de precisar la evaluación matemática de los esfuerzos en la base del diente de las ruedas dentadas, un grupo de investigación conformado por profesores de la E.P.S. de Zamora de la Universidad de Salamanca y la Facultad de Ingeniería Mecánica de la CUJAE (Habana-Cuba) ejecutaron un trabajo de investigación y desarrollo [23], [24] con el objetivo de contrastar los esfuerzos obtenidos mediante el empleo del método de los elementos finitos y los procedimientos de cálculo derivados de las vigentes normas ISO para evaluar la capacidad de carga de los engranajes cilíndricos. Como resultado del trabajo fue presentado un procedimiento matemático de generación del perfil de los dientes de un engranaje cilíndrico de dientes rectos en base a formulaciones de la firma MAAG. En sentido general, los resultados fueron alentadores, aunque presentaban el inconveniente de algunas impresiones asociadas con la incorrecta apreciación de los parámetros de la herramienta de generación en el tallado de los dientes.

En la actualidad, son conocidas diferentes formas de modelar geoméricamente una rueda dentada, con mayor o menor precisión del flanco del diente, pero llama la atención la poca información práctica y aplicable para reproducir el

proceso que se publica en la literatura especializada sobre el particular [25], [26], [27]. Esta situación ha demostrado que la modelación de las ruedas dentadas es un recurso puesto a buen resguardo por los estudiosos del tema, debido a lo estratégico que resulta poder disponer de este recurso para el desarrollo de engranajes con geometría óptima que permita máxima capacidad de carga con mínimo volumen y características convenientes de explotación. Algunas normas de engranajes [28] ya plantean realizar el cálculo de resistencia por flexión mediante la modelación y análisis por el Método de los Elementos Finitos, para lo cual se necesita el modelo geométrico del diente.

En este sentido, el presente trabajo de investigación, dirigido a perfeccionar el modelo de los engranajes cilíndricos con empleo del método de los elementos finitos y el desarrollo matemático de una geometría precisa de los flancos de los dientes, muestra un distintivo interés y actualidad en las investigaciones asociadas con el perfeccionamiento de la evaluación de los esfuerzos en los dientes de los engranajes cilíndricos.

### 3. Modelo matemático para la generación de los dientes de engranajes cilíndricos.

La geometría interna de la rueda dentada tiene como frontera el diámetro de cresta y el diámetro de fondo del dentado, ella define el tipo de rueda dentada con respecto al perfil de los flancos de los dientes. El conocimiento de la geometría interna de los engranajes permite una valoración del grado de conjugación de los flancos activos de los dientes que tributan en gran medida a la eficiencia y efectividad de la transmisión.

La precisión del perfil del diente es determinante en la magnitud de los choques o contactos bruscos entre las ruedas del engranaje. A los efectos de evitar la arbitrariedad en la construcción del perfil del diente se han establecido curvas sencillas de ejecutar técnicamente. Si bien se plantea que con las curvas cicloidales se obtienen perfiles más exactos con una disminución importante del desgaste y choques de los dientes, estas ventajas pueden existir únicamente cuando la distancia entre los centros de los engranajes se mantiene rigurosamente invariable. Con la curva de evolvente el perfil que se obtiene es simple y fácil de ejecutar, no existiendo la necesidad de mantener la distancia entre ejes invariable para que el engrane se realice en buenas condiciones. En general, la forma más difundida de los flancos de los dientes en los engranajes cilíndricos de ejes paralelos son los perfiles simétricos con curvas de evolvente. En la práctica otros perfiles, como son los dientes con perfiles asimétricos,

perfiles cicloidales y perfiles redondos [29], [30], pueden ser empleados pero con menos frecuencia.

La preferencia por el perfil de evolvente se establece por la normalización de las herramientas de corte con flancos rectos para la generación de los dientes de las ruedas de engranajes y por la posibilidad que ofrece la curva de evolvente de tallar ruedas con corrección del perfil de los dientes mediante el desplazamiento radial relativo entre la herramienta de generación y el semiproducto de la rueda dentada. El mencionado desplazamiento permite utilizar un perfil de trabajo de los dientes en función de la necesidad de variar unas u otras características del engranaje.

Sobre la curva *evolvente* que forma el flanco de un diente de engranaje existe amplia información. Prácticamente en todos los textos que tratan la geometría y cinemática de los engranajes evolventes se describen las características de esta curva. Sin embargo, la curva que define la zona de redondeo del pie del diente, cuando éste es fabricado por generación, es mucho menos tratada en la literatura especializada, el nombre que comúnmente recibe esta curva es *trocoide*. La mayoría de los autores, cuando tratan la generación del flanco del diente mediante una modelación matemática, sustituyen la trocoide por un arco de circunferencia para simplificar los análisis, dado que en estudios del contacto de los flancos activos, ciertamente esta curva no tiene gran influencia en el engranaje. La influencia más significativa de esta simplificación se produce cuando se realizan los cálculos de resistencia en el fondo del diente y no se considera la verdadera geometría del diente. Varios sistemas CAD han introducido como opciones el diseño de engranajes, pero sin considerar la curva de la trocoide en el fondo del diente.

En el presente trabajo, ha sido elaborado un procedimiento práctico para permitir la aplicación del Método de los Elementos Finitos en un engranaje cilíndrico con contacto exterior y ejes paralelos mediante la generación de ruedas cilíndricas con dientes rectos y haciendo empleo de las formulaciones paramétricas de la curva de la trocoide presentadas por Henriot en 1999 [31]. Los autores pretenden con esta publicación presentar una metodología para el trazado gráfico del contorno de los dientes de engranajes cilíndricos que se destaque por una claridad del procedimiento y el modelo matemático base del algoritmo para el cálculo de los puntos geométricos del contorno de los flancos de los dientes.

En las siguientes figuras se muestran las bases del trazado del perfil del diente, el origen de coordenadas de los pares (x,y) correspondientes al lugar geométrico de localización de los puntos de la curva de evolvente y la curva de trocoide que perfilan el flanco del diente.

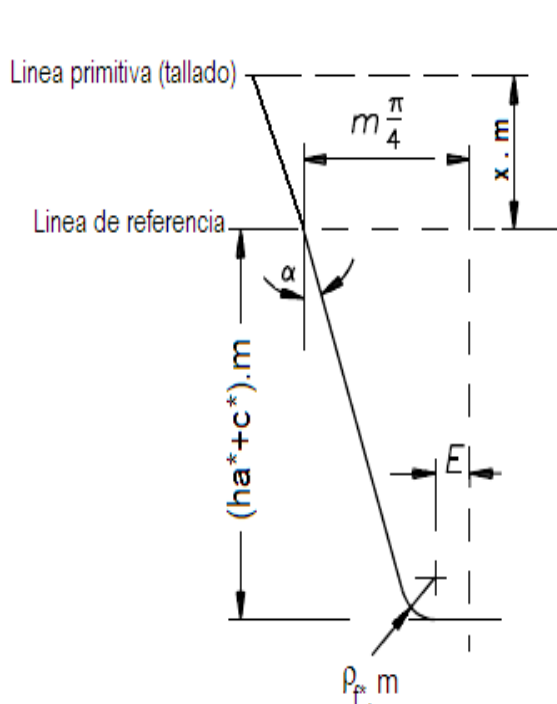


Fig. 1 - Representación de las dimensiones y perfil de la cremallera de referencia de los dientes (perfil acabado).



Fig. 2 - Esquema del vínculo entre el borde superior de la herramienta y el corte del fondo del diente.

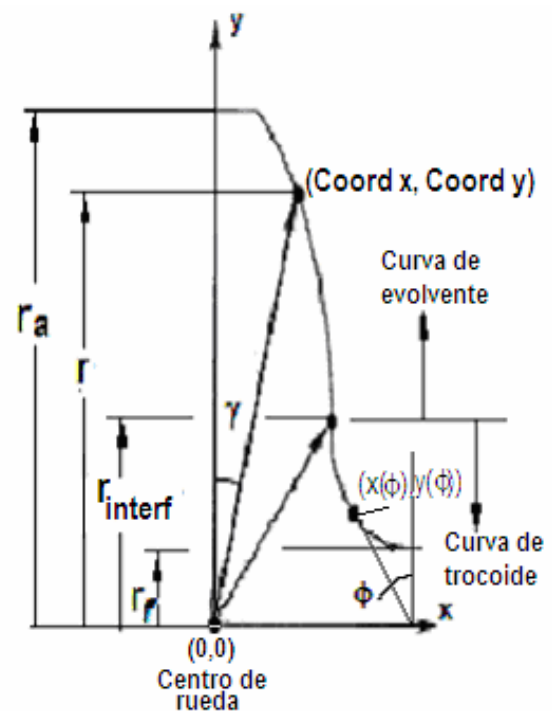


Fig. 3 - Esquema base del trazado del perfil del diente con la variable "r" para la curva de evolvente y la variable  $\phi$  en la curva de trocoide.

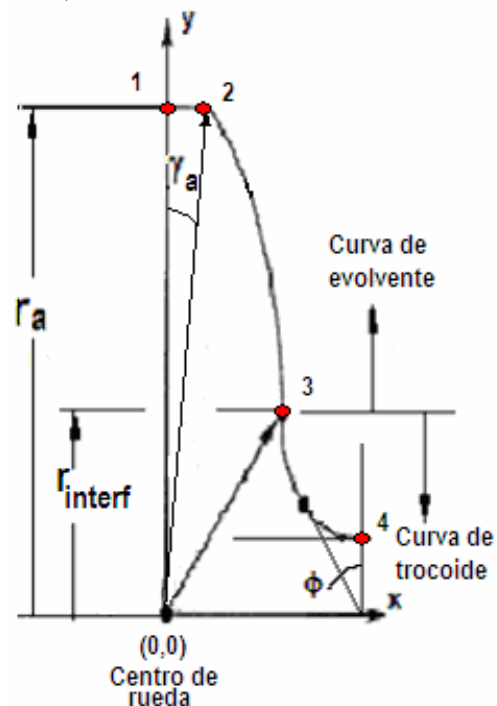


Fig. 4 - Esquema de la ubicación de los puntos extremos de las curvas que componen el flanco activo del diente.

El contorno del perfil del diente se realiza considerando el trazado de tres partes, según se refiere a continuación.

### Primer trazado.

Corresponde con la cresta del diente (trazado entre puntos 1 y 2), y sus coordenadas límites se definen en función del diámetro de cresta de la rueda.

$$\text{Punto 1: } \left(0, \frac{da}{2}\right)$$

$$\text{Punto 2: } \left(\frac{da}{2} \cdot \sin \gamma_a, \frac{da}{2} \cdot \cos \gamma_a\right)$$

Siendo:

$$\alpha_a = \cos^{-1}\left(\frac{d_{bn}}{da}\right)$$

$$\gamma_a = \frac{0,5 \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot \tan \alpha}{z_v} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_a$$

### Segundo trazado.

Corresponde con la parte del perfil del diente que contiene un perfil de curva de evolvente (trazado entre puntos 2 y 3), y sus coordenadas límites se definen en función de la geometría externa de la rueda y el flanco recto del borde cortante de la herramienta de generación. El trazado de la curva de evolvente se realiza evaluando las fórmulas con diferentes valores en disminución consecutiva del diámetro "d" entre el valor del diámetro de cresta y el punto 3 correspondiente al momento del corte de la curva de evolvente por la interferencia de la herramienta de corte.

$$\text{Punto 3: } \left(\frac{d_{\text{int erf}}}{2} \cdot \sin \gamma_{\text{int erf}}, \frac{d_{\text{int erf}}}{2} \cdot \cos \gamma_{\text{int erf}}\right)$$

Siendo:

$$d_{\text{int erf}} = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{d_{bn}}{2}\right)^2 + \left(\frac{m \cdot z_v \cdot \sin \alpha}{2} - \frac{(ha^* - x) \cdot m}{\sin \alpha}\right)^2}$$

$$\alpha_{\text{int erf}} = \cos^{-1}\left(\frac{d_{bn}}{d_{\text{int erf}}}\right)$$

$$\gamma_{\text{int erf}} = \frac{0,5 \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot \tan \alpha}{z_v} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_{\text{int erf}}$$

### Tercer trazado.

Corresponde con la parte del diente que contiene un perfil de curva de trocoide y el fondo del espacio entre dientes (trazado entre puntos 3 y 4). Las coordenadas límites se definen en función la geometría externa de la rueda y parámetros de la herramienta de corte incluyendo su extremos cortante de la cresta y el radio superior de redondeado. El trazado de esta zona se realiza evaluando desde  $\phi = 0$  hasta el valor de  $\phi$  que produzca un par de coordenadas por encima del punto 3. Desde la coordenada correspondiente a  $\phi = 0$  se traza una curva con el radio de fondo hasta el punto 4.

$$\text{Punto 4: } \left(\frac{df}{2} \cdot \sin(180/z_v), \frac{df}{2} \cdot \cos(180/z_v)\right)$$

Es conocido que en la actividad de la ingeniería avanzada y los estudios asociados a investigaciones científicas se requiere frecuentemente el empleo de algoritmos de cálculo, los cuales serán más eficiente en la medida que se conozcan los orígenes de dichos algoritmos. Los grafos bicromáticos son una herramienta eficaz para la elaboración de algoritmos que brindan respuesta a complejos problemas de la más diversa naturaleza. Estos grafos están definidos por puntos llamados vértices y líneas llamadas aristas. La denominación de bicromáticos viene dada porque en su confección generalmente se usan dos colores. Un modelo matemático puede representarse por un grafo bicromático donde los vértices que representan las relaciones y las variables tengan respectivamente colores diferentes. El grafo estará bien conformado cuando no existan vértices de un mismo color unidos [32]. Esta técnica ha sido descrita por Martínez (1997), profesor de la Facultad de Ingeniería Mecánica de la CUJAE [33]. El método de grafos bicromáticos será empleado para definir el modelo matemático de la geometría del perfil del diente, el modelo del problema de simulación asociado con la obtención del perfil evolvente del diente en coordenadas cartesianas y el procedimiento de cálculo

### Relaciones del modelo matemático de la geometría del perfil del diente en zona de curva de evolvente en coordenadas cartesianas.

$$\text{R1: } z_v \cdot \cos \beta_b^2 \cdot \cos \beta - z = 0$$

$$\text{R2: } d \cdot \cos \beta - m \cdot z = 0$$

$$\text{R3: } d_{bn} - m \cdot z_v \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\text{R4: } \beta_b - \sin^{-1}(\sin \beta \cdot \cos \alpha) = 0$$

$$\text{R5: } d_{yn} - m \cdot z_v + d - d_y = 0$$

$$\text{R6: } \cos(\alpha_{yn}) - \left(\frac{d_{bn}}{d_{yn}}\right) = 0$$

$$\text{R7: } \gamma_{yn} - \frac{0,5 \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot \tan \alpha}{z_v} - \text{inv} \alpha + \text{inv} \alpha_{yn} = 0$$

$$\text{R8: } \text{Coord } x - 0,5 \cdot d_y \cdot \sin \gamma_{yn} = 0$$

$$\text{R9: } \text{Coord } y - 0,5 \cdot d_y \cdot \cos \gamma_{yn} = 0$$

Cantidad de relaciones R = 9

Cantidad de variables: V = 15

Conjunto de variables: V = { $z_v, z, \beta_b, \beta, d, m, d_{bn}, \alpha, d_{yn}, d_y, \alpha_{yn}, \gamma_{yn}, x, \text{Coord } x, \text{Coord } y$ }

Grados de libertad del modelo: L = V - R = 6

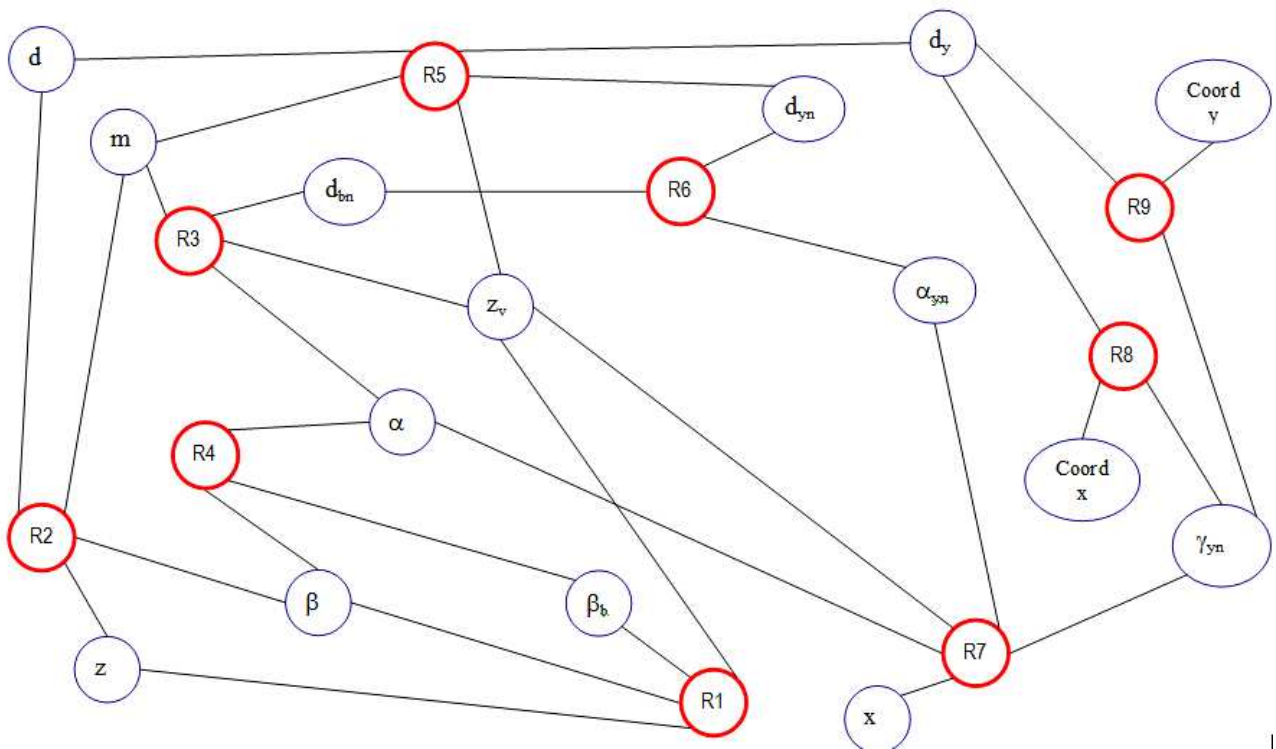


Fig.5 - Modelo matemático en grafo bicromático de geometría del perfil del diente en zona de curva de evolvente en coordenadas cartesianas.

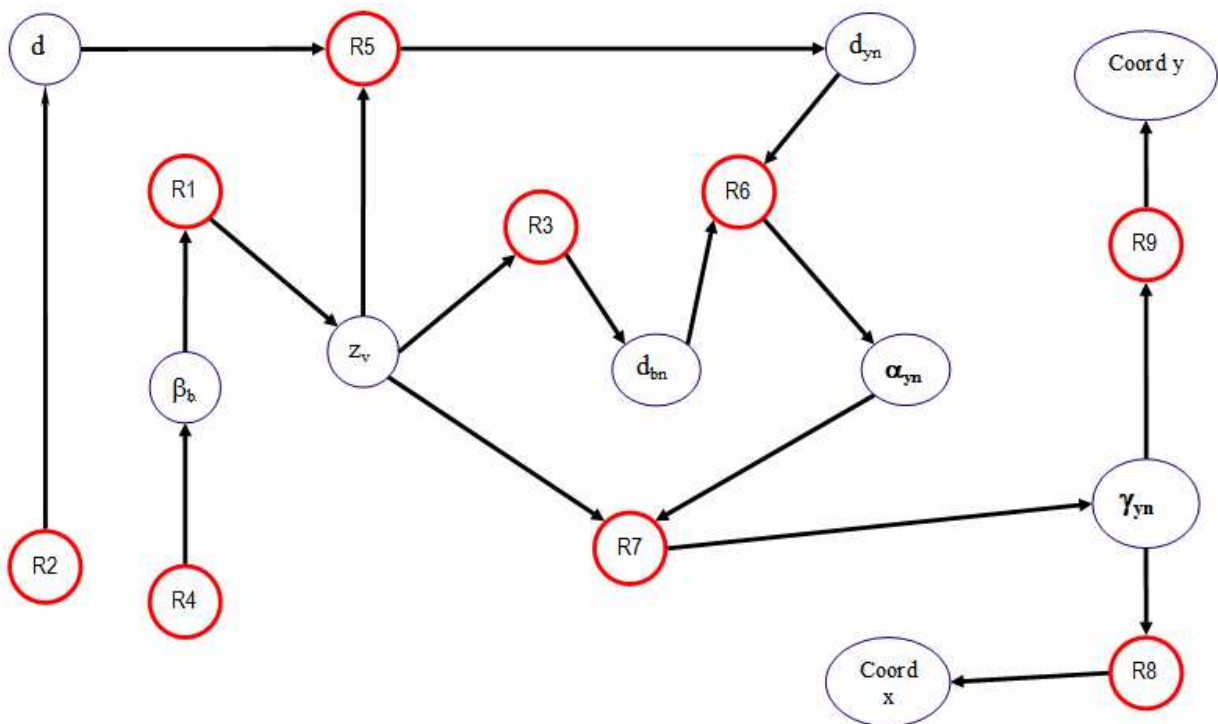


Fig.6 - Modelo matemático de solución al problema asociado con la obtención del perfil evolvente del diente en coordenadas cartesianas.

### Organización del algoritmo para evaluar las coordenadas cartesianas de los puntos que conforman el lugar geométrico de la curva de evolvente en el flanco de los dientes.

Cantidad de relaciones R = 9

Cantidad de variables: V = 15

Conjunto de variables de entrada /datos): E = {z,  $\beta$ , m,  $\alpha$ , x,  $d_y$ }

Conjunto de variables a calcular: VC = {z<sub>v</sub>,  $\beta_b$ , d, d<sub>bn</sub>, d<sub>yn</sub>,  $\alpha_{yn}$ ,  $\gamma_{yn}$ , Coord x, Coord y}

Variable de simulación (entrada) = d<sub>y</sub>

Conjunto de variables de salida /respuesta): S = {Coord x, Coord y}

$$(1) R4: \beta_b = \sin^{-1}(\sin \beta \cdot \cos \alpha)$$

$$(2) R1: z_v = \frac{z}{\cos \beta} \cdot \cos \beta$$

$$(3) R3: d_{bn} = m \cdot z_v \cdot \cos \alpha$$

$$(4) R2: d = \frac{m \cdot z}{\cos \beta}$$

$$(5) R5: d_{yn} = m \cdot z_v - d + d_y$$

$$(6) R6: \alpha_{yn} = \cos^{-1}(d_{bn}/d_{yn})$$

$$(7) R7: \gamma_{yn} = \frac{0,5 \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot \tan \alpha}{z_v} + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_{yn}$$

$$(8) R8: \text{Coord } x = 0,5 \cdot d_y \cdot \sin \gamma_{yn}$$

$$(9) R9: \text{Coord } y = 0,5 \cdot d_y \cdot \cos \gamma_{yn}$$

### Relaciones del modelo matemático de la geometría del perfil del diente en zona de curva de trocoide en coordenadas cartesianas.

Cantidad de relaciones R = 10

Cantidad de variables: V = 19

Conjunto de variables: V = {z<sub>v</sub>, z,  $\beta_b$ ,  $\beta$ , m,  $\alpha$ , x, h<sub>a</sub>\*, c\*,  $\rho_f$ \*, E, H, x<sub>T</sub>, y<sub>T</sub>,  $\phi$ , x<sub>M</sub>, y<sub>T</sub>, x<sub>( $\phi$ )</sub>, y<sub>( $\phi$ )</sub>}

Grados de libertad del modelo: L = V - R = 9

$$R1: z_v \cdot \cos \beta_b^2 \cdot \cos \beta - z = 0$$

$$R2: \beta_b - \sin^{-1}(\sin \beta \cdot \cos \alpha) = 0$$

$$R3: \frac{\pi}{4} \cdot m - (h_a^* + c^*) \cdot m \cdot \tan \alpha - \rho_f^* \cdot m \cdot \tan \alpha - \frac{\rho_f^* \cdot m}{\cos \alpha} - E$$

$$R4: (h_a^* + c^*) \cdot m - \rho_f^* - x \cdot m - H = 0$$

$$R5: (0,5 \cdot m \cdot z_v - H) \cdot \sin \phi - (0,5 \cdot m \cdot z_v \cdot \phi + E) \cdot \cos \phi - x_T = 0$$

$$R6: (0,5 \cdot m \cdot z_v \cdot \phi + E) \cdot \sin \phi + (0,5 \cdot m \cdot z_v - H) \cdot \cos \phi - y_T = 0$$

$$R7: x_T - x_M - \left[ \frac{(0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) + H \cdot \tan \phi}{H - (0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) \cdot \tan \phi} \cdot \frac{\rho_f^* \cdot m}{\sqrt{1 - \left( \frac{(0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) + H \cdot \tan \phi}{H + (0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) \cdot \tan \phi} \right)^2}} \right] = 0$$

$$R8: y_T - y_M - \frac{\rho_f^* \cdot m}{\sqrt{1 - \left( \frac{(0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) + H \cdot \tan \phi}{H + (0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) \cdot \tan \phi} \right)^2}} = 0; \text{ si } \frac{(0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) + H \cdot \tan \phi}{H - (0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) \cdot \tan \phi} \geq 0$$

$$y_T - y_M + \frac{\rho_f^* \cdot m}{\sqrt{1 - \left( \frac{(0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) + H \cdot \tan \phi}{H + (0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) \cdot \tan \phi} \right)^2}} = 0; \text{ si } \frac{(0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) + H \cdot \tan \phi}{H - (0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) \cdot \tan \phi} < 0$$

$$R9: x_M \cdot \cos(\pi/z_v) + y_M \cdot \sin(\pi/z_v) - x_{(\phi)} = 0$$

$$R10: y_M \cdot \cos(\pi/z_v) - x_M \cdot \sin(\pi/z_v) - y_{(\phi)} = 0$$

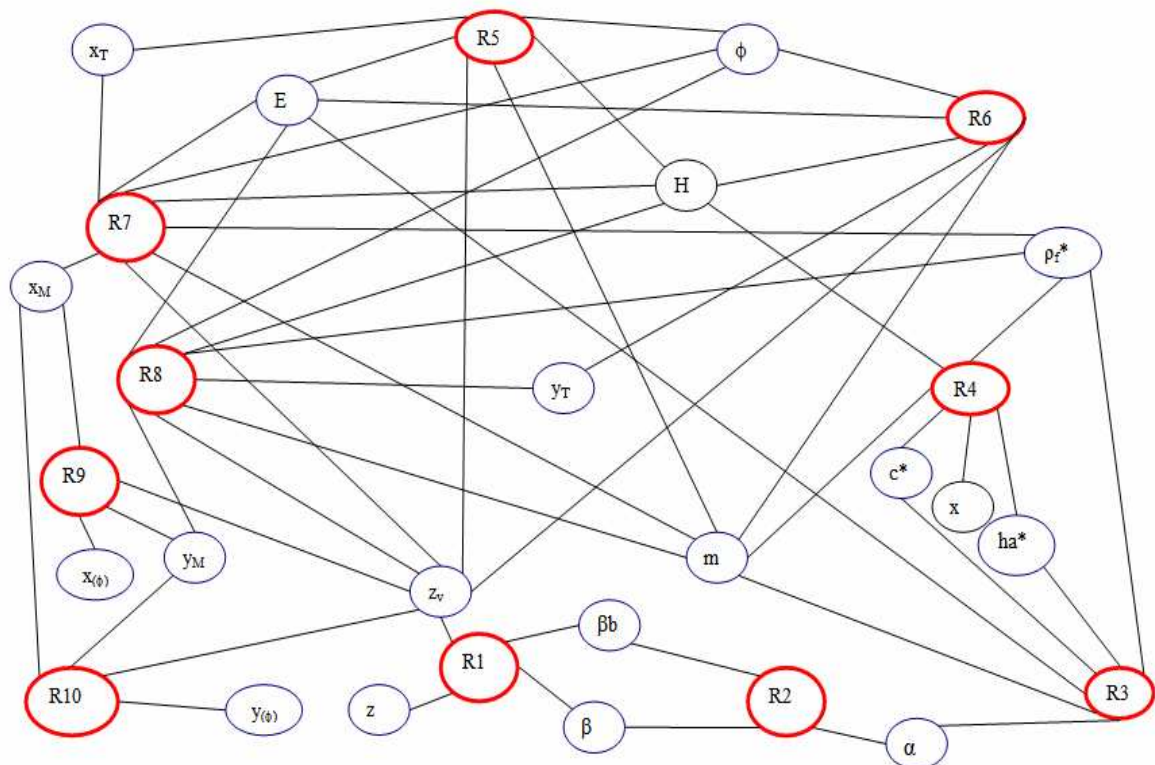


Fig. 7 - Modelo matemático en grafo bicromático de geometría del perfil del diente en zona de curva de trocoide en coordenadas cartesianas.

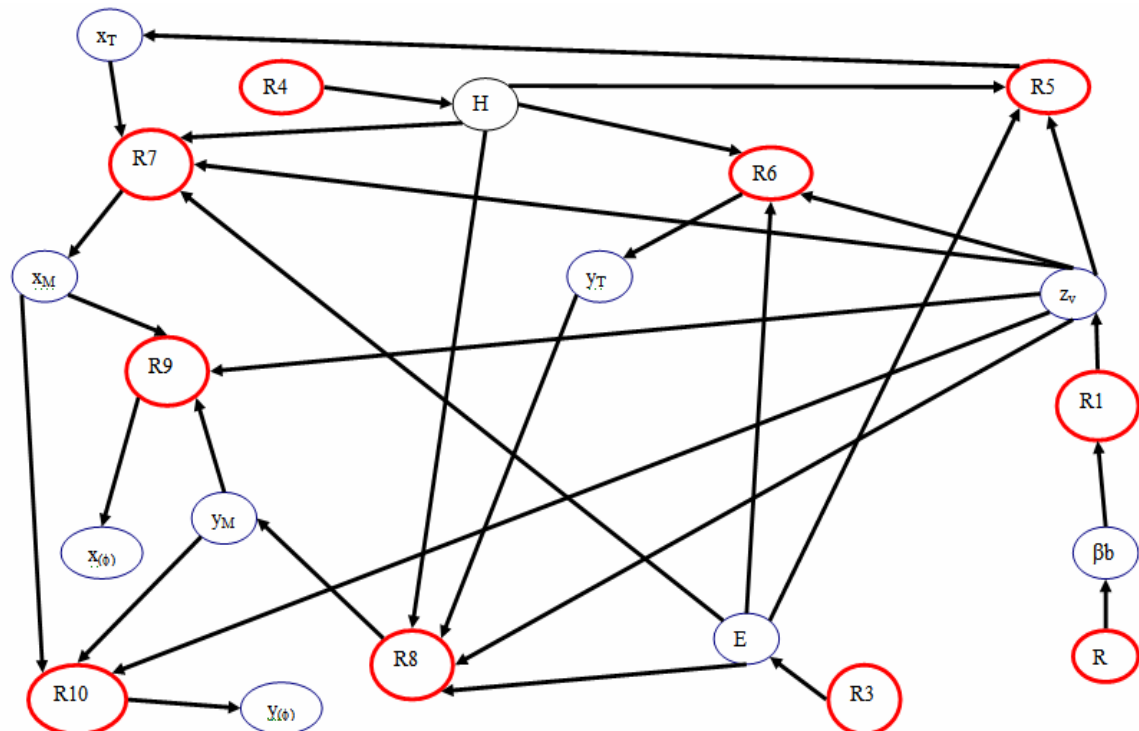


Fig. 8 - Modelo matemático de la solución al problema asociado con la obtención del perfil trocoide del diente en coordenadas cartesianas.



### Organización del algoritmo de simulación para evaluar las coordenadas cartesianas de los puntos que conforman el lugar geométrico de la curva de trocoide en el fondo de los dientes.

Cantidad de relaciones  $R=10$

Cantidad de variables:  $V = 19$

Conjunto de variables de entrada /datos):  $E = \{z, \beta, m, \alpha, x, h_a^*, c^*, \rho_f^*\}$

Conjunto de variables a calcular:  $VC = \{z_v, \beta_b, E, H, x_T, y_T, x_M, y_T, x_{(\phi)}, y_{(\phi)}\}$

Variable de simulación (entrada)  $= \phi$

Conjunto de variables de salida /respuesta):  $S = \{x_{(\phi)}, y_{(\phi)}\}$

$$(1) R3: E = \frac{\pi}{4} \cdot m - (h_a^* + c^*) \cdot m \cdot \tan \alpha - \rho_f^* \cdot m \cdot \tan \alpha - \frac{\rho_f^* \cdot m}{\cos \alpha}$$

$$(2) R4: H = (h_a^* + c^*) \cdot m - \rho_f^* - x \cdot m \quad (3) R2: \beta_b = \sin^{-1}(\sin \beta \cdot \cos \alpha)$$

$$(4) R1: z_v = \frac{z}{\cos \beta_b^2 \cdot \cos \beta}$$

$$(5) R5: x_T = -(0,5 \cdot m \cdot z_v \cdot \phi + E) \cdot \cos \phi + (0,5 \cdot m \cdot z_v - H) \cdot \sin \phi$$

$$(6) R6: y_T = (0,5 \cdot m \cdot z_v \cdot \phi + E) \cdot \sin \phi + (0,5 \cdot m \cdot z_v - H) \cdot \cos \phi$$

$$(7) R7: x_M = x_T - \left[ \frac{(0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) + H \cdot \tan \phi}{H - (0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) \cdot \tan \phi} \cdot \frac{\rho_f^* \cdot m}{\sqrt{1 - \left( \frac{(0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) + H \cdot \tan \phi}{H + (0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) \cdot \tan \phi} \right)^2}} \right]$$

$$(8) R8: y_M = y_T - \frac{\rho_f^* \cdot m}{\sqrt{1 - \left( \frac{(0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) + H \cdot \tan \phi}{H + (0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) \cdot \tan \phi} \right)^2}}; \text{ si } \frac{(0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) + H \cdot \tan \phi}{H - (0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) \cdot \tan \phi} \geq 0$$

$$y_M = y_T + \frac{\rho_f^* \cdot m}{\sqrt{1 - \left( \frac{(0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) + H \cdot \tan \phi}{H + (0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) \cdot \tan \phi} \right)^2}}; \text{ si } \frac{(0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) + H \cdot \tan \phi}{H - (0,5 \cdot z_v \cdot m \cdot \phi + E) \cdot \tan \phi} < 0$$

$$(9) R9: x_{(\phi)} = x_M \cdot \cos\left(\frac{\pi}{z_v}\right) + y_M \cdot \sin\left(\frac{\pi}{z_v}\right)$$

$$(10) R10: y_{(\phi)} = -x_M \cdot \sin\left(\frac{\pi}{z_v}\right) + y_M \cdot \cos\left(\frac{\pi}{z_v}\right)$$

## 4. Generación del modelo geométrico.

Los resultados del trabajo permitieron ratificar los planteamientos realizados por especialistas Höhn (FZG) [34] y Boerner (Caterpillar) [35], que han abordado el tema de los engranajes con modelos de elementos finitos, que plantean la posibilidad de emplear modelos elaborados en 2D, con 3 dientes y elementos triangulares de 6 nodos o cuadriláteros de 8 nodos, los que pueden reportar una diferencia con relación a ISO 6336-3-B del orden del 10-

15% en dientes helicoidales y algo menores para el caso de dientes rectos en estos tipos de modelos. Las anteriores afirmaciones fueron corroboradas en trabajos diplomados de alumnos de ingeniería mecánica [36] y en el desarrollo de la actual investigación que realizó ensayos de modelos de ruedas completas y otros con una ubicación central de un diente acompañado de porciones de tres y cinco dientes, llegándose a la conclusión de que las tensiones son prácticamente equivalentes y no hacen necesario el empleo de más de tres dientes para un cálculo correcto. Las diferencias no superaron el 2,5% de los esfuerzos máximos.

A continuación se puede ver la semejanza en los esfuerzos obtenidos en modelos de 3D para los sectores dentados con 3 y 5 dientes. Los dos dientes extremos de la porción de cinco dientes se encuentran prácticamente sin tensión.

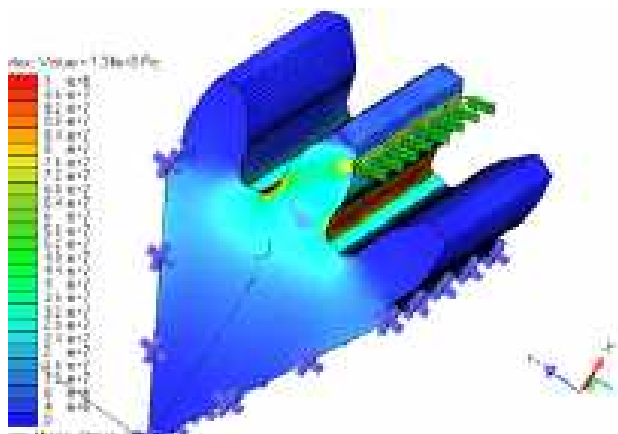


Fig. 9 - Modelo en 3D de Elementos Finitos con 3 dientes.

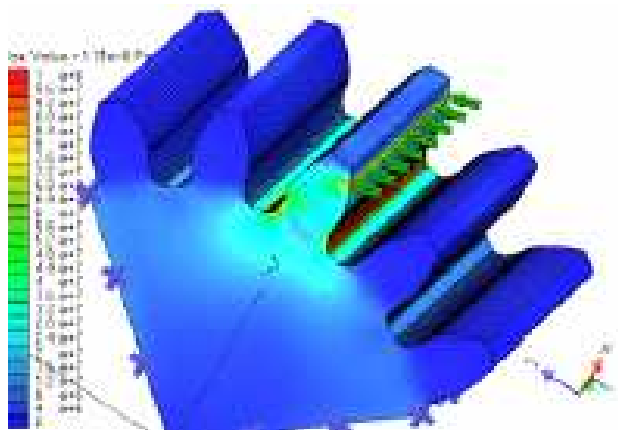


Fig. 10 - Modelo en 3D de Elementos Finitos con 5 dientes.

Este resultado llevó a redefinir la geometría del modelo con empleo de un diente activo y los dientes adyacentes a fin de generar las condiciones de contorno más reales en nuestro modelo, y permite corroborar la aseveración que trabajar con un número de tres dientes con ubicación de diente activo en el centro es lo más aconsejable.

En base a la formulación establecida y para la generación del modelo geométrico en una plataforma FEM se recomiendan ejecutar los siguientes pasos:

**1er paso:** Se procede a generar una serie de puntos para la curva de evolvente (recomendable una cantidad mayor de 12 puntos) y otros para la curva de trocoide (recomendable una cantidad mayor de 16 puntos). Estos puntos se generan

con un paso angular fijo (ver Figura 11). La experiencia en la generación del modelo permite recomendar que el paso angular pueda variar entre  $1^\circ$  y  $0,25^\circ$ . Es importante comprobar que el paso fijado permita una coincidencia de los puntos de inicio y fin de las curvas de evolvente y la trocoide en la zona del flanco del diente donde pudiera iniciar la interferencia de los perfiles. Es recomendable, tomar un paso menor para la curva de trocoide, a fin de generar un mayor número de puntos, puesto que la experiencia ha demostrado que la zona de máximo esfuerzo en la base del diente requiere una buena precisión de esa franja del diente.

**2do Paso:** Una vez definidos estos puntos, se genera una curva que los contenga. Con el fin de que esta curva sea lo más precisa posible se ha de reducir el número de puntos a interpolar, con lo cual se generará la curva trocoide así como la evolvente por más de una curva de interpolación.

**3er Paso:** Se procede a reproducir de forma simétrica el flanco recién generado. A su vez se trazarán las circunferencias típicas del diente (cabeza, referencia y de fondo).

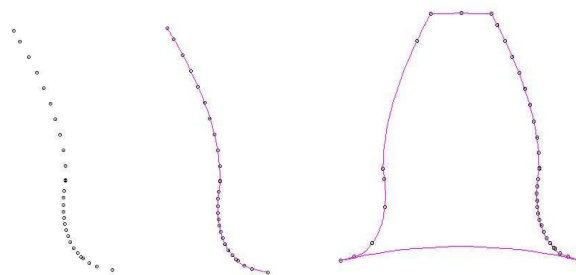


Fig. 11 - Proceso de generación de curvas a partir de los puntos calculados.

**4to Paso:** Generado un primer diente, se procede a reproducirlo hasta el número de tres. Finalizado este paso se retoca la geometría hasta reducirla a un sector que contenga el deseado número de dientes.

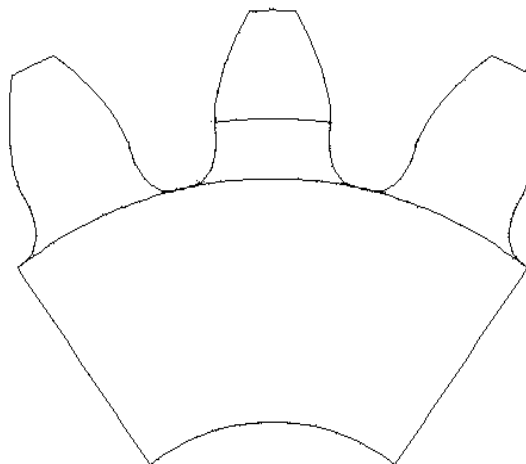


Fig. 12 - Modelo completo.

## 5. Conclusiones.

Durante el trabajo fueron establecidas las bases y desarrollado un modelo matemático del flanco activo de los dientes de una rueda cilíndrica con dientes rectos.

El método de grafos bicromáticos fue empleado para definir el modelo matemático de la geometría del perfil del diente, el modelo del problema de simulación asociado con la obtención del perfil evolvente y el perfil de trocoide del diente en coordenadas cartesianas y el procedimiento de cálculo, demostrando la efectividad de la técnica de grafos bicromáticos.

Los resultados de la actual investigación, con una mejora del tratamiento matemático de la curva del fondo del diente y una consecuente aplicación de la carga permitieron mejorar los resultados obtenidos en anteriores trabajo del Grupo de Investigación de Engranaje de la EPS de Zamora y la CUJAE.

Las tensiones reportadas para un modelo de rueda dentada y un sector de rueda de 3 dientes son prácticamente equivalentes, no siendo necesario el empleo de más de tres dientes para un cálculo correcto. Las diferencias no superaron el 2,5% de los esfuerzos máximos.

En general, el trabajo desarrollado ha aportado originales resultados en el tema de los engranajes cilíndricos de dientes rectos, donde la novedad científica se aprecia fundamentalmente en el desarrollo de un algoritmo en base a un conjunto de ecuaciones paramétricas de las curvas de evolvente y de trocoide para definir el perfil de los flancos de los dientes de las ruedas dentadas.

## 6 - Bibliografía

- 1 - Houghson, D., *Analytical Derivation of Gear Tooth X Factor*, Journal of the Industrial Mathematics Society, Volume II, 1951.
- 2 - López, R., *Practical Optimization of Helical Gears Using Computer Software*, Gear Technology, Pags. 16-21, Vol 10, N°3, Jun. 1993.
- 3 - Fuentes, J., *Selección del Desplazamiento en Engranajes Cilíndricos Basada en el Recubrimiento y el Equilibrado Óptimo de Deslizamientos Específicos*. Memorias del Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, Madrid, España, 1993.
- 4 - González Rey, G., *Cálculo de Engranajes Cónicos*. Ingeniería en Transporte, Vol XVI, #1-2, 1995.
- 5 - González Rey, G.; *El Método de Búsqueda Exhaustiva como Alternativa en la Optimización del Cálculo de Engranajes*. Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica. Vol 3, # 2, Pags. 3 - 17, 1999.
- 6 - Tennyson, E. A. , *Finite Element Stress Analysis of Generic Spur Gear Tooth*. AGMA Paper 1994.
- 7 - Sfakiotakis, V. G., *Numerical Simulation of Conjugate Spur Gear Action*, Computers & Structures, Vol 79, May 2001.
- 8 - Lewis, W.; *Investigation of the Strength of Gear Teeth, an address to the Engineer's Club of Philadelphia*, Octubre 15, 1892. Reproducido en Gear Technology, Vol. 9, No. 6, Pag. 19, Nov/Dic 1992.
- 9 - Blok, H.; *Measurement of temperature flashes on gear teeth under extreme pressure conditions*. Proceedings of the General Discussion on Lubrication and Lubricants, London 1937, The Institution of Mechanical Engineers, London.
- 10 - Jaroslav Mackerle; *Finite element analysis of machine elements A bibliography (1977-1997)*. Engineering Computations, Vol. 16 No. 6, 1999, pp. 677-748.
- 11 - Jaroslav Mackerle; *2D and 3D Finite Element Meshing and Remeshing. A Bibliography (1990-2001)*. Engineering Computations, Vol. 18 No. 8, 2001, pp. 1108-1197.
- 12 - Varadi, K. and Poller, R., *Analysis of gear teeth contact by the finite element method*, Acta Tech.
- 13 - Tessema, A. et al., *Effect of web and flange thickness on nonmetallic gear performance*, Gear Technol., Vol. 12, No. 6, pp. 30-35, 1995.
- 14 - Oda, S. and Miyachika, K., *Effects of key bending fatigue breakage of thin-rimmed spur gear*, Bull. JSME, Vol. 27, No. 232, pp. 2279-86, 1984.
- 15 - Somprakit, P. et al., *Effect of fitting parameters on spur gear stresses*, Int. Power Trans. Gear. Conf., Chicago, ASME, pp. 815-822, 1989.
- 16 - Sundararajan, S. and Amin, S., *Finite element analysis of ring gear casing spline contact*, J. Propul. Power, Vol. 7, No. 4, pp. 602-606, 1991.
- 17 - Chen, C.S., *Coupled lateral-torsional vibrations of geared rotor-bearing systems*, PhD Thesis, Arizona State Univ., 1993.
- 18 - Choy, F. K. et al., *Modal analysis of multistage gear systems coupled with gearbox vibrations*, J. Mech. Design, ASME, Vol. 114, No. 3, pp. 486-497, 1992.
- 19 - Randall, R.B. and Kelly, D.W., *Analytical and experimental vibration analysis of a gearbox casing*, Austral. Vib. Noise Conf., Melbourne, pp. 68-72, 1990.
- 20 - Filiz, I.H. and Eyercioglu, O., *Evaluation of gear tooth stresses by finite element method*, J. Eng. Industry, ASME, Vol. 117, No. 2, pp. 232-239, 1995.
- 21 - Moriwaki, I. et al., *Global local finite element method (GLFEM) in gear tooth stress analysis*, Int. Power Transmiss. Gearing Conf., DE Vol. 43, ASME, pp. 45-51, 1992.
- 22 - Suzuki, T. et al., *Tooth fillet stresses of gear with thin rim, automatic meshing for FEM calculation*, Bull. JSME, Vol. 25, No. 204, pp. 1022-29, 1982.
- 23 - Gonzalez Rey, G. Frechilla F. P., Garcia M.R.J.; *Finite Elements Method vs ISO 6336 in the Calculation of Gear Load Capacity*. Proceeding of 8th Pan-American Congress of Applied Mechanics [2004], Pags. 169-172.
- 24 - González Rey, G. Frechilla F. P., Garcia M.R.J.; *El método de elementos finitos como alternativa en el*

- cálculo de engranajes. Ingeniería Mecánica*, Vol. 6, No.1 (2002) 55-67.
- 25 - Johana Lucía Prieto; *Modelamiento geométrico de engranajes cilíndricos corregidos con tecnología CAD/CAM*. Memorias del Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica. Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá. Diciembre 2001.
  - 26 - Cotaquispe Cevallos. *Modelación geométrica de engranajes en Sistemas CAD*. Revista de la Facultad de Ciencias e Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica, Lima. Perú. Noviembre 2004.
  - 27 - Wang Lixin; *Solid model generation of involute cylindrical gears*. Gear Technology, October 2003.
  - 28 - ISO 6336-3: *Calculation of load capacity of helical gears- Part 3: Tooth bending strength*. 1996.
  - 29 - Dobrovolski, V.; *Elementos de Máquinas*, Editorial MIR, Moscú, 1980.
  - 30 - Baránov, G.; *Curso de la Teoría de Mecanismos y Máquinas*, Editorial MIR, Moscú, 1979.
  - 31 - Henriot, Georges; *Traité Théorique et Practique des engranajes*. Edit. DUNOD, Paris 1999.
  - 32 - Harari P. *Teoría de grafos*, ediciones Madrid, 1973.
  - 33 - Martínez Escanaverino, J., y otros, " *Algorítmica del Diseño Mecánico* ", Ingeniería Mecánica, Vol. 0, N°1, 1997.
  - 34 - Doc. ISO/TC60/SC2/WG6/AH3 N. 10. *German intermediate information submittal. Comparision of tooth root stress*. March 2000.
  - 35 - Doc. ISO/TC60/SC2/WG6 N. 784. *Tooth root bending stress calculation*. August 1999.
  - 36 - González Álvarez, R.; *Determinación de tensiones mediante la aplicación de elementos finitos en engranajes*. Trabajo de Diploma. E.P.S. de Zamora. Universidad de Salamanca, Jul. 2004.

## A mathematical model and procedure for graphic generation of tooth flanks of cylindrical gear.

### Abstract.

A mathematical model based developed in coordinated polar and a computational procedure for graphic generation of tooth flanks in external parallel-axis cylindrical involute gears are exposed. The mentioned model and procedure are able to consider the effect in the tooth gear geometry of the addendum modification coefficient and the rack shaped tool used in the cutting of gear. Additionally, the results are useful for the improvement of the gear tooth model and formulations for the load capacity calculation of cylindrical gears by means of the method of finite elements. For the determination of the calculation procedures based on the mathematical models was established using the technique of dichromatic graphs.

**Key words:** External parallel-axis cylindrical involute gears, tooth flanks, mathematical model, FEM.