

# Propuesta para el Cálculo de la Eficiencia en los Engranajes Cilíndricos.

**E. Mirabet Lemos \*, L. Martínez Delgado \*\*.**

\* Empresa Argelio Reyes (PRODAL).

\*\* Departamento Mecánica Aplicada Facultad de Ingeniería Mecánica, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (ISPJAE).

E-mail: luisiscris@yahoo.com.mx

lmartinez@mecanica.cujae.edu.cu

(Recibido el 14 de Noviembre de 2003, aceptado 21 de Junio de 2004).

## Resumen.

El presente trabajo muestra la deducción de expresiones para evaluar la eficiencia en las transmisiones por engranajes cilíndricos. La deducción parte de considerar la eficiencia como una función de la potencia de salida y de las pérdidas de potencia a lo largo de la línea práctica de engranaje. El trabajo demuestra que la eficiencia es función de parámetros elementales de la transmisión y de la herramienta empleada. Se da solución a un problema, como ejemplo de aplicación de los resultados, y se evalúa la influencia del ángulo de presión de la herramienta empleada.

**Palabras claves:** Engranajes, eficiencia.

## 1. Introducción.

El conocimiento de la eficiencia de un mecanismo cualquiera, es de vital importancia para la evaluación de la energía que se pierde o disipa en el mismo. Esto también permite conocer la necesidad o no de sistemas de enfriamientos en los mismos [1].

Se ha hecho costumbre expresar la eficiencia en términos del coeficiente de fricción. En tal sentido son familiares mecanismos tales como, el tornillo de potencia, la transmisión sin-fin, embragues de fricción, correas, etc.

Diversos han sido los procedimientos empleados para hallar el valor de la eficiencia en las transmisiones por engranaje, destacándose los procedimientos desarrollados, por Buckingham, Kudriatsev, firma MAAG GEAR, etc.

Durante el funcionamiento de las transmisiones dentadas, los perfiles de los dientes en contacto, deslizan uno con respecto al otro, y como el par de ruedas dentadas transmite potencia, el rozamiento conjuntamente con la fuerza normal entre los dientes, hacen aparecer una fuerza resistiva. [2].

Aunque también se produce la rodadura entre los dientes, las pérdidas de potencia por este concepto son insignificantes, por lo que solo se consideran las fuerzas de rozamiento y la velocidad de deslizamiento que actúan sobre la superficie de los dientes [3].

Para el análisis que se realizará en este trabajo, se adoptarán tres suposiciones, muy comunes en este tipo de estudio:

1- Los dientes de evolvente tienen un perfil totalmente exacto y los pasos entre estos también son exactamente iguales. Además los dientes se encuentran totalmente paralelos a los ejes geométricos de los engranes.

2- La carga normal al diente es constante durante todo el tiempo de funcionamiento del engranaje.

3- Cuando dos o más pares de dientes soportan la carga simultáneamente la carga normal es repartida igualmente entre ellos.

## 2. Pérdidas de energía por fricción.

En general, en una transmisión por engranaje, la eficiencia puede expresarse de dos formas [4]

- Mediante la potencia del accionamiento motriz o de entrada y la potencia de salida.
- Mediante la potencia de salida y la potencia disipada.

entre la potencia de salida y la potencia de entrada al sistema, se puede expresar la eficiencia de la siguiente forma:

$$\eta = \frac{N_s}{N_e} = \frac{N_s}{N_s + N_f} = \frac{1}{1 + \frac{N_f}{N_s}} = \frac{1}{1 + k}$$

Donde:  $k = \frac{N_f}{N_s}$  (1)

$N_f$  y  $N_s$  representan la potencia disipada y la de salida del sistema.

Para analizar la potencia disipada se empleará de la figura 1, la cual muestra diferentes posiciones de contacto de una pareja de dientes, a lo largo de la línea práctica de engranaje  $\overline{mn}$ . Los puntos  $x$  e  $y$  representan puntos cualesquiera de contacto en la zona de *acercamiento* ( $\overline{mp}$ ) y de *alejamiento* de este  $\overline{pn}$ , referidas al polo  $p$  del engranaje. Además dicha figura muestra los desplazamientos  $\beta_x$  y  $\beta_y$  correspondientes a los desplazamientos  $\overline{xp}$  y  $\overline{yp}$  respectivamente, así como los desplazamientos angulares  $\beta_a$  y  $\beta_r$  correspondientes a los desplazamientos en la zona de *acercamiento* y *alejamiento*.

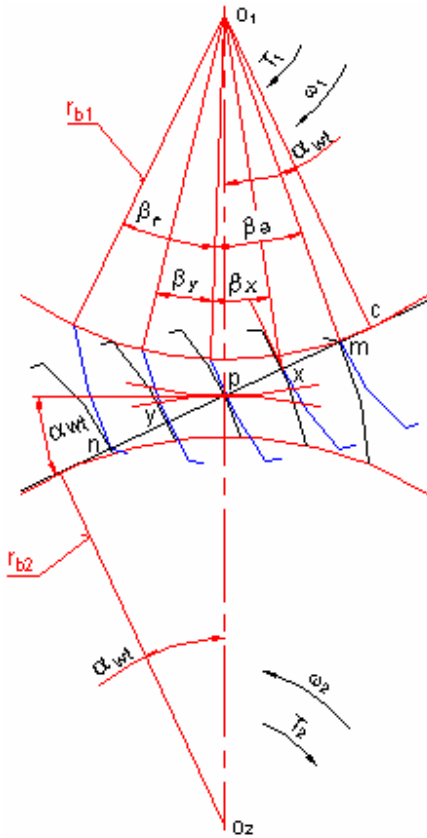


Figura. 1 Desplazamientos de acercamiento y alejamiento del polo P.

Para analizar la pérdida de potencia por rozamiento, en la transmisión, esta será dividida en dos partes, una correspondiente a la zona de acercamiento al polo del

engranaje, que definiremos como  $N_{fa}$  y otra de alejamiento que definiremos  $N_{fr}$ :

$$N_f = N_{fa} + N_{fr} = \frac{dW_{fa}}{dt_a} + \frac{dW_{fr}}{dt_r} \quad (2)$$

Donde  $dt_{a,r}$  y  $dW_{fa,r}$ , son los diferenciales, de tiempos y pérdidas de energía, para las etapas de acercamiento y alejamiento respectivamente:

$$dt_{a,r} = \frac{dx_{a,r}}{V \cdot \cos \alpha_{wt}} \quad (3)$$

Donde,  $V$  es la velocidad tangencial en la circunferencia de rodadura,  $\alpha_{wt}$  es el ángulo de engranaje y  $dx_{a,r}$  son los diferenciales de desplazamiento a lo largo de la línea de engranaje.

Expresando los diferenciales de pérdida de energía en función de la potencia por rozamiento y el tiempo se tiene:

$$dW_{fa,r} = N_{fa,r} \cdot dt_{a,r} = F_{roz,a,r} \cdot V_{d,a,r} \cdot dt_{a,r}$$

$$dW_{fa,r} = \mu \cdot F_{na,r} \cdot V_{d,a,r} \cdot dt_{a,r} \quad (4)$$

$$F_{roz,a,r} = \mu \cdot F_{na,r} \text{ (Fuerza de rozamiento. Ver Fig. 2)}$$

$$F_{na,r} \text{ - (Fuerza normal entre los dientes. Ver Fig. 2)}$$

$$V_{d,a,r} = (\omega_1 + \omega_2) \cdot x_{a,r} \quad (5)$$

Donde  $V_{d,a,r}$  representa la velocidad de deslizamiento entre los dientes,  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son las velocidades angulares del piñón y la rueda respectivamente,  $x_{a,r}$  son abscisas para la posición de los puntos de contacto, en cada instante, en las etapas de acercamiento y alejamiento respectivamente, y  $\mu$  el coeficiente de rozamiento que se considera constante.

Sustituyendo (3) y (5) en (4) respectivamente, así como las fuerzas de rozamiento  $F_{roz,a,r}$ , tenemos en forma compacta la expresión que permite evaluar la pérdida de energía tanto en zona de acercamiento como de alejamiento:

$$dW_{fa,r} = \mu \cdot F_{na,r} \cdot (\omega_1 + \omega_2) \cdot x_{a,r} \cdot \frac{dx_{a,r}}{V \cdot \cos \alpha_{wt}} \quad (6)$$

Integrando ambos miembros se tiene:

$$\int dW_{fa,r} = \int \mu \cdot F_{na,r} \cdot (\omega_1 + \omega_2) \cdot \frac{x_{a,r} \cdot dx_{a,r}}{V \cdot \cos \alpha_{wt}} \quad (7)$$

Ahora la expresión que evalúa el trabajo disipado total será:

$$W_f = \int dW_{fa} + \int dW_{fr} \quad (8)$$

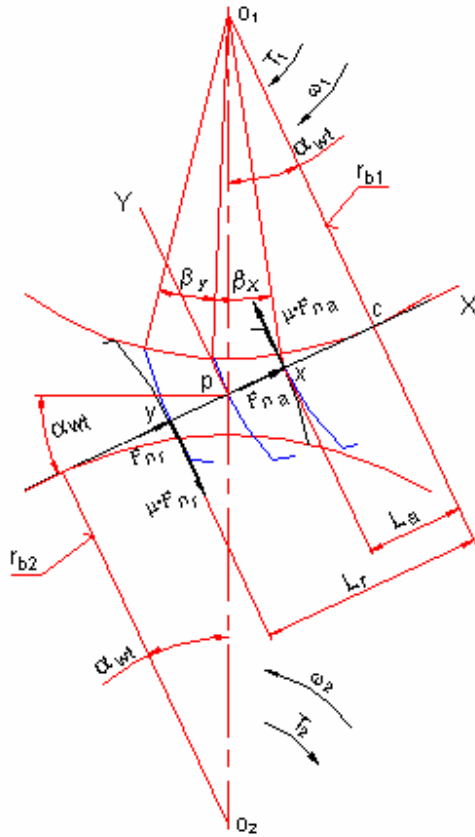


Figura. 2 Sistema de fuerzas actuantes sobre el piñón.

Para solucionar (8) se realizan dos pasos:

1- Se sustituye (7) en (8).

2- Se considera un sistema de ejes coordenados, levogiro, cuyo origen se encuentra en el polo del engranaje, con coordenadas a lo largo de la línea de engranaje y perpendicular a esta. Las abscisas estarán a lo largo de la línea de engranaje y su valor positivo se tomará a la derecha del sistema de referencia, ver Fig.1. Haciendo uso del mencionado sistema, se pueden establecer los límites de integración para la obtención del trabajo disipado total, como se muestra a continuación.

$$W_f = \frac{\mu \cdot (\omega_1 + \omega_2)}{V \cdot \cos \alpha_{wt}} \cdot \left[ \int_0^m F_{na} \cdot x_a \cdot dx_a + \int_{-n}^0 -F_{nr} \cdot x_r \cdot dx_r \right]$$

$$W_f = \frac{\mu \cdot (\omega_1 + \omega_2)}{V \cdot \cos \alpha_{wt}} \cdot \left[ \int_0^m F_{na} \cdot x_a \cdot dx_a + \int_0^n F_{nr} \cdot x_r \cdot dx_r \right] \quad (9)$$

La expresión (9) se modificará para expresarla en función de los ángulos de posición,  $\beta_x, \beta_y$  del engrane

1. Para esto se definen las distancias  $x_a, x_r$  y los diferenciales respectivos para dichas distancias,  $dx_a, dx_r$  y los límites de integración, ver Figura. 1:

$x_a$  - Distancia del punto de contacto al polo durante el acercamiento

$x_r$  - Distancia del polo al punto de contacto en el alejamiento.

$$x_a = r_{b1} \cdot \beta_x \quad (10)$$

$$x_r = r_{b1} \cdot \beta_y \quad (11)$$

$$dx_a = r_{b1} \cdot d\beta_x \quad (12)$$

$$dx_r = r_{b1} \cdot d\beta_y \quad (13)$$

Donde:  $r_{b1}, r_{b2}$  - radios bases del piñón y la rueda respectivamente.

Sustituyendo las expresiones (10), (11), (12), (13) en (9) y haciendo  $\Sigma \omega = \omega_1 + \omega_2$  se obtiene:

$$W_f = \frac{\mu \cdot \Sigma \omega \cdot r_{b1}^2}{V \cdot \cos \alpha_{wt}} \cdot \left[ \int_0^{\beta_{a1}} F_{na} \cdot \beta_x \cdot d\beta_x + \int_0^{\beta_{r1}} F_{nr} \cdot \beta_y \cdot d\beta_y \right] \quad (14)$$

## 2.1- Determinación de la fuerza normal a los dientes, en el acercamiento y el alejamiento.

Como puede apreciarse, en la expresión (14), en la primera integral aparece el término  $F_{na}$  y en la segunda el término  $F_{nr}$ , que son las fuerzas normales que actúan sobre el piñón, durante las etapas de acercamiento y alejamiento respectivamente.

Para la obtención de estas fuerzas se usará la Fig. 2, que muestra varias posiciones, sobre la línea práctica de engranaje, de una pareja de dientes. En la mencionada figura el piñón es el elemento motriz y rota en sentido horario.

Teniendo en cuenta que la fuerza de rozamiento entre los dientes cambia de sentido al pasar por el polo del engranaje, surgen dos esquemas de análisis, originados por el momento,  $T_{a,r}$  ejercido por el piñón durante el acercamiento o el alejamiento, la fuerza de rozamiento y la fuerza normal.

Haciendo uso de la Fig. 2, podemos plantear:

1-Para el acercamiento, la ecuación de equilibrio es:

$$-T_a + F_{na} \cdot r_{b1} - \mu \cdot F_{na} \cdot L_a = 0 \quad (15)$$

donde  $L_a$  -brazo de la fuerza de rozamiento medido desde c hasta el punto de contacto.

$$L_a = r_{b1} \cdot (\tan \alpha_{wt} - \beta_x) \quad (16)$$

Sustituyendo (16) en (15), se obtiene:

$$F_{na} = \frac{T_a}{r_{b1} \cdot [1 - \mu \cdot (\tan \alpha_{wt} - \beta_x)]} \quad (17)$$

2-Para el alejamiento, la ecuación de equilibrio es:

$$-T_r + F_{nr} \cdot r_{b1} - \mu \cdot F_{nr} \cdot L_r = 0 \quad (18)$$

Donde  $L_r$  -brazo de la fuerza de rozamiento medido desde c hasta el punto de contacto.

$$L_r = r_{b1} \cdot (\tan \alpha_{wt} + \beta_y) \quad (19)$$

Sustituyendo (19) en (18), se obtiene:

$$F_{nr} = \frac{T_r}{r_{bl} \cdot [1 + \mu \cdot (\tan \alpha_{wt} + \beta_y)]} \quad (20)$$

Sustituyendo (17) y (20) en (14), y teniendo en cuenta que  $T_a, T_r$  son constantes, se obtiene la expresión final de la pérdida de energía.

$$W_f = \frac{\sum \omega \cdot r_{bl} \cdot T_a}{V \cdot \cos \alpha_{wt}} \cdot \int_0^{\beta_a} \frac{\beta_x \cdot d\beta_x}{\frac{1}{\mu} - (\tan \alpha_{wt} - \beta_x)} + \frac{\sum \omega \cdot r_{bl} \cdot T_r}{V \cdot \cos \alpha_{wt}} \cdot \int_0^{\beta_r} \frac{\beta_y \cdot d\beta_y}{\frac{1}{\mu} + (\tan \alpha_{wt} + \beta_y)} \quad (21)$$

Integrando se obtiene:

$$W_f = \frac{\sum \omega \cdot r_{bl}}{V \cdot \cos \alpha_{wt}} \cdot [T_a \cdot (\beta_a + \ln k_a) + T_r \cdot (\beta_r + \ln k_r)] \quad (22)$$

Donde:

$$k_a = \left[ \frac{1}{\frac{\beta_a}{\sigma_a} + 1} \right]^{\sigma_a} ; \quad k_r = \left[ \frac{1}{\frac{\beta_r}{\sigma_r} + 1} \right]^{\sigma_r}$$

$$\sigma_a = 1/\mu - \tan \alpha_{wt} ; \quad \sigma_r = 1/\mu + \tan \alpha_{wt}$$

Sustituyendo ahora  $T_a$  y  $T_r$ , en la expresión (22) por los momentos promedios, en el acercamiento y el alejamiento respectivamente, como se muestra en las dos expresiones siguientes (haciendo uso del trabajo total ( $W_a, W_r$ ) para dichas zonas y el ángulo de desplazamiento total respectivo)

$$T_a = \frac{W_a}{\beta_a} = \frac{T_2}{u} \cdot \left[ 1 - \mu \cdot \tan \alpha_{wt} + \frac{\mu}{2} \cdot \beta_a \right] \quad (23)$$

$$T_r = \frac{W_r}{\beta_r} = \frac{T_2}{u} \cdot \left[ 1 + \mu \cdot \tan \alpha_{wt} + \frac{\mu}{2} \cdot \beta_r \right] \quad (24)$$

Efectuando la sustitución de (23) y (24) en (22), se tiene:

$$W_f = \frac{r_{bl} \cdot T_2 \cdot \sum \omega}{u \cdot V \cdot \cos \alpha_{wt}} \cdot \left[ \left( 1 - \mu \cdot \tan \alpha_{wt} + \frac{\mu}{2} \cdot \beta_a \right) \cdot (\beta_a + \ln k_a) + \left( 1 + \mu \cdot \tan \alpha_{wt} + \frac{\mu}{2} \cdot \beta_r \right) \cdot (\beta_r + \ln k_r) \right] \quad (25)$$

### 3. Expresión de la eficiencia.

Haciendo uso de la expresión (1) y teniendo en cuenta que,

$$N_f = \frac{W_f}{t} , \quad N_s = T_2 \cdot \omega_2 \quad \text{se obtiene:}$$

$$k = \frac{N_f}{N_s} = \frac{W_f}{t \cdot T_2 \cdot \omega_2} = \frac{W_f}{\frac{g_\alpha}{V \cdot \cos \alpha_{wt}} \cdot T_2 \cdot \omega_2} \quad (26)$$

Donde  $t$  es el tiempo en que un punto de contacto entre los dientes recorre toda la línea práctica de engranaje, o sea el segmento  $\overline{mn}$ , cuya longitud se designará como  $g_\alpha = r_{bl} \cdot (\beta_a + \beta_r)$ , ver Fig. 1. Además el término  $V \cdot \cos \alpha_{wt}$ , representa la componente de la velocidad tangencial a lo largo de la línea de engranaje, es decir, la velocidad del punto de contacto.

Sustituyendo (25) en (26), se tiene que:

$$k = \frac{\frac{r_{bl} \cdot T_2 \cdot \sum \omega}{u \cdot V \cdot \cos \alpha_{wt}} \cdot \left[ \left( 1 - \mu \cdot \tan \alpha_{wt} + \frac{\mu}{2} \cdot \beta_a \right) \cdot (\beta_a + \ln k_a) + \left( 1 + \mu \cdot \tan \alpha_{wt} + \frac{\mu}{2} \cdot \beta_r \right) \cdot (\beta_r + \ln k_r) \right]}{\frac{g_\alpha}{V \cdot \cos \alpha_{wt}} \cdot T_2 \cdot \omega_2}$$

Simplificando la expresión anterior y sustituyendo  $g_\alpha$  por su expresión, se obtiene definitivamente la expresión de  $k$ .

$$k = \left( 1 + \frac{1}{u} \right) \cdot \frac{\left[ \left( 1 - \mu \cdot \tan \alpha_{wt} + \frac{\mu}{2} \cdot \beta_a \right) \cdot (\beta_a + \ln k_a) + \left( 1 + \mu \cdot \tan \alpha_{wt} + \frac{\mu}{2} \cdot \beta_r \right) \cdot (\beta_r + \ln k_r) \right]}{\beta_a + \beta_r} \quad (27)$$

Donde:

$$\beta_a = \frac{\overline{mp}}{r_{bl}} = \frac{r_{b2} \cdot (\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha_{wt})}{r_{bl}} = u \cdot (\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha_{wt})$$

$$\beta_r = \frac{\overline{pn}}{r_{bl}} = \frac{r_{bl} \cdot (\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha_{wt})}{r_{bl}} = \tan \alpha_{a1} - \tan \alpha_{wt}$$

### 4. Ejemplo de aplicación.

A continuación, haciendo uso de las expresiones desarrolladas, se determinará la eficiencia de una transmisión de engranajes cilíndricos de dientes rectos, basado en datos de la literatura [1]:

$$\alpha = 14.5^\circ$$

$$\beta_a = 0.3691 \text{ rad}$$

$$\beta_r = 0.3045 \text{ rad}$$

$$z_1 = 18$$

$$z_2 = 48$$

$$\mu = 0,0272$$

**Solución:**

$$\beta_a = 0,3691$$

$$\beta_r = 0,3045$$

$$\mu = 0,0272$$

$$U = 48 / 18$$

$$\alpha_{wt} = \pi \cdot \alpha / 180$$

$$\sigma_a = 1 / \mu - \tan \alpha_{wt} = 36,506088$$

$$\sigma_r = 1 / \mu + \tan \alpha_{wt} = 37,023323$$

$$k_a = (1 / (1 + (\beta_a / \sigma_a)))^{\sigma_a} = 0,692638$$

$$k_r = (1 / (1 + (\beta_r / \sigma_r)))^{\sigma_r} = 0,738411$$

$$k = \left(1 + \frac{1}{u}\right) \cdot \frac{\left[ \left(1 - \mu \cdot \tan \alpha_{wt} + \frac{\mu}{2} \cdot \beta_a\right) \cdot (\beta_a + \ln k_a) + \left(1 + \mu \cdot \tan \alpha_{wt} + \frac{\mu}{2} \cdot \beta_r\right) \cdot (\beta_r + \ln k_r) \right]}{\beta_a + \beta_r}$$

$$k = 0,006346$$

$$\eta = 1 / (1 + k) = 0,993693744$$

Según la literatura consultada [1] la respuesta al problema planteado es  $\eta = 0,9936$ . Como puede apreciarse existe una total concordancia entre ambos resultados.

Haciendo uso de los datos del ejemplo anterior se analizó el comportamiento de la eficiencia en función del ángulo de presión de la herramienta, para valores de  $\alpha = 20^\circ$ ,  $22,5^\circ$  y  $25^\circ$ , manteniendo constantes los restantes parámetros. A continuación se dan los respectivos valores de eficiencia:

$$0,993693752; 0,993693756; 0,993693760$$

Como se observa la diferencia entre los valores es insignificante.

## 5. Conclusiones.

- La eficiencia en los engranajes cilíndricos depende de múltiples factores, tales como: número de dientes y coeficientes de corrección de los engranes, ángulo de la hélice en el cilindro de referencia, el coeficiente de rozamiento o de fricción, ángulo de presión y coeficiente de altura del addendum de la herramienta con que se elaboran los engranes.
- La energía disipada, asociada al piñón, durante el acercamiento es menor que durante el alejamiento, ocurriendo lo mismo para la rueda. Esto se debe a que la fuerza de fricción favorece el movimiento durante el acercamiento (Ver Fig. 2).
- La influencia del ángulo de presión de la herramienta, en la eficiencia de los engranajes cilíndricos, es insignificante

## 6. Bibliografía.

- [1] Buckingham, E.: *Analitical Mechanics of Gears*. New York, /Toronto/London 1949.
- [1] Gerardo, C.: *Teoría de las Máquinas y Mecanismos. Dinámica de las Máquinas*. Edit. Pueblo Y Educación. Cuba. 1977.
- [3] Martínez D. L.: *Influencia de diferentes parámetros geométricos en la Eficiencia de los Engranajes Cilíndricos*. Iv Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica. Santiago de Chile. 1999
- [4] Niemann. G. *Tratado Teórico Práctico de Elementos de Máquinas*. Editorial Labor, S.A., Barcelona. 1967.

## Efficiency calculation proposal for cylindrical gears.

### Abstract:

The present paper states the deduction of expressions that allows evaluation of the efficiency in transmissions with cylindrical engagements. The deduction leaves to considering the efficiency as a function of the exit power and the losses of power along the practical line of engagement. The paper demonstrates that the efficiency is function of elementary transmission parameters and the used tool. Solution is given to a problem, as example of application of the results, and the influence of the angle of pressure of the used tool is evaluated.

**Key words:** Gears, efficiency.