

Razón de contacto total en los engranajes cónicos circulares.

E. Mirabet Lemos*, L. Martínez Delgado.**

* Empresa Argelio Reyes (PRODAL)

** Departamento Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería Mecánica, ISPJAE, La Habana, Cuba, CP 19 390.

E-mail: luiscriscris@yahoo.com.mx

lmartinez@mecanica.cujae.edu.cu

(Recibido el 11 de Mayo de 2005; aceptado el 14 de Julio de 2005)

Resumen.

En el presente trabajo se realiza un análisis deductivo de las expresiones que permiten evaluar la *razón de contacto total* en los engranajes cónicos circulares. Dicho análisis se ha realizado haciendo uso de la transmisión cilíndrica virtual.

Se obtienen dos formulas equivalentes, pero que se diferencian en algunos de los parámetros que las conforman. Cada una de estas formulas esta basada en formas diferentes de analizar la razón de contacto total y en particular uno de sus componentes, la razón de contacto transversal. Lo anterior da origen a dos formas de análisis de la razón de contacto total.

Una de las formas analiza el contacto entre los dientes a lo largo de la línea de engranaje y la otra analiza el contacto a través de los arcos de contacto correspondientes, a las circunferencias de referencia, coincidente con las primitivas, en estas transmisiones.

Palabras Claves: Engranajes cónicos, razón de contacto.

1. Introducción.

Para la obtención de la razón de contacto total en los engranajes objetos de análisis se hará uso de los engranajes virtuales o equivalentes (Fig. 1).

La *razón de contacto total* viene dada por la relación entre la longitud total del arco de contacto del engrane y el paso base de la transmisión, en la transmisión cilíndrica virtual.

La *razón de contacto total* es un parámetro de gran incidencia tanto en la cinemática como en la resistencia de los engranajes en general, ya que a medida que este parámetro aumenta la transmisión se hace más silenciosa y también más resistente, ya que la carga se reparte entre una mayor cantidad de dientes durante todo el periodo de funcionamiento. Luego es imprescindible al tratar con engranajes y en particular con los cónicos circulares tener una exacta comprensión del parámetro *razón de contacto total*, el cual como se verá en este trabajo, presenta ciertas complejidades en su interpretación. Tratar de tener una adecuada comprensión de este parámetro es lo que ha motivado el presente trabajo. En el mismo se realizará la deducción de dos formas diferentes de expresar la *razón de contacto total*.

2. Parámetros principales de la transmisión.

α - Angulo de presión de la herramienta.

h_a^* -Coeficiente de altura de la cabeza del diente de la herramienta.

α_t -Angulo de presión de la herramienta en el plano transversal.

β_{nm} -Angulo de la hélice en el plano medio de los dientes.

Z_1 -Número de dientes del piñón.

Z_2 -Número de dientes de la rueda.

x_1 -Coeficiente de corrección del piñón.

x_2 -Coeficiente de corrección de la rueda.

Σ -Angulo suma de los semi-conos primitivos.

δ_1 -Angulo del semi-cono primitivo del piñón.

$$\tan \delta_1 = \frac{\cos[\pm(90^\circ - \Sigma)]}{U \pm \sin[\pm(90^\circ - \Sigma)]} \quad (1)$$

δ_2 --Angulo del semi-cono primitivo de la rueda.

$$\delta_2 = \Sigma -\delta_1 \quad (2)$$

Z_v --Número de dientes virtual del piñón.

$$Z_{v1} = \frac{Z_1}{\cos \delta_1} \quad (3)$$

Z_{v2} --Número de dientes virtual de la rueda.

$$Z_{v2} = \frac{Z_2}{\cos \delta_2} \quad (4)$$

r_{b1v} --Radio básico virtual del piñón.

$$r_{b1v} = r_{m1v} \cos \alpha_{tv} = \frac{m_{nm} Z_{v1}}{2 \cos \beta_{nm}} \cos \alpha_t \quad (5)$$

r_{b2v} --Radio básico virtual de la rueda.

$$r_{b2v} = r_{m2v} \cos \alpha_{tv} = \frac{m_{nm} Z_{v2}}{2 \cos \beta_{nm}} \cos \alpha_t \quad (6)$$

r_{a1v} ---Radio exterior virtual del piñón.

r_{m1v} ---Radio de referencia virtual del piñón.

$$r_{a1v} = r_{m1v} + (h_a^* + x_1) m_{tm} \quad (7)$$

$$r_{a1v} = \frac{m_{nm}}{\cos \beta_{nm}} \left(\frac{z_{v1}}{2} + h_a^* + x_1 \right)$$

r_{a2v} ---Radio exterior virtual de la rueda.

r_{m2v} ---Radio de referencia virtual de la rueda.

$$r_{a2v} = r_{m2v} + (h_a^* + x_2) m_{tm} \quad (8)$$

$$r_{a2v} = \frac{m_{nm}}{\cos \beta_{nm}} \left(\frac{z_{v2}}{2} + h_a^* + x_2 \right)$$

p_{tv} ----Paso transversal virtual.

$$p_{tv} = \frac{m_{nm} \cdot \pi}{\cos \beta_{nm}} \quad (9)$$

p_{btv} ---Paso básico transversal virtual.

$$p_{btv} = p_{tv} \cos \alpha_{tv} = \frac{m_{nm} \pi}{\cos \beta_{nm}} \cos \alpha_t \quad (10)$$

Como se expresa en la introducción, se abordan dos formas para expresar la *razón de contacto total* en las transmisiones por engranajes cónicos circulares. Cada forma surge debido a las diferencias que existen entre los parámetros empleados para expresar las mismas. No obstante ambas formas siempre dan un mismo resultado y el empleo de una u otra depende de los datos con que se cuente o de la facilidad para obtener los mismos.

Tanto en una forma como en la otra la *razón de contacto total* ϵ_γ se expresa como sigue:

$$\epsilon_\gamma = \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta$$

Donde la diferencia entre ambas formas radica en la expresión empleada para el cálculo de la *razón de contacto transversal* ϵ_α . Más adelante se definirá el termino ϵ_β .

3. Forma 1.

Esta forma 1 esta basada en el empleo de las *razones de contacto teóricas*, a lo largo de la línea de engranaje, del piñón, la rueda y total. La razón de contacto teórica del piñón es la razón entre la longitud $N_1 a_1 / p_{btv}$, para la rueda $N_2 a_2 / p_{btv}$ y total $N_1 N_2 / p_{btv}$, (Ver Fig. 2).

Como se expresó en la introducción, la deducción de la fórmula para el cálculo de la razón de contacto total se basará en el empleo del engranaje cilíndrico virtual. En dicha figura se aprecia que:

$$r_{a1v}^2 = r_{b1v}^2 + (N_1 a_1)^2 \quad (11)$$

$$N_1 a_1 = \sqrt{r_{a1v}^2 - r_{b1v}^2}$$

$$r_{a2v}^2 = r_{b2v}^2 + (N_2 a_2)^2 \quad (12)$$

$$N_2 a_2 = \sqrt{r_{a2v}^2 - r_{b2v}^2}$$

$$N_2 a_2 = N_2 a_1 + a_1 a_2 \Rightarrow N_2 a_1 = N_2 a_2 - a_1 a_2$$

$$N_1 a_1 = N_1 a_2 + a_1 a_2 \Rightarrow N_1 a_2 = N_1 a_1 - a_1 a_2$$

$$a_{wv} \sin \alpha_{wtv} = N_1 N_2 = N_2 a_1 + a_1 a_2 + N_1 a_2$$

$$a_1 a_2 = N_2 a_2 + N_1 a_1 - a_{wv} \sin \alpha_{wtv} \quad (13)$$

Sustituyendo las expresiones (11) y (12):

$$a_1 a_2 = \sqrt{r_{a1v}^2 - r_{b1v}^2} + \sqrt{r_{a2v}^2 - r_{b2v}^2} - a_{wv} \sin \alpha_{wtv} \quad (14)$$

$$a_{wv} = (r_{m1v} + r_{m2v}) \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{wtv}}$$

$$a_{wv} = \frac{m_{nm} \cos \alpha_t}{2 \cos \beta_{nm} \cos \alpha_{wtv}} (z_{v1} + z_{v2}) \quad (15)$$

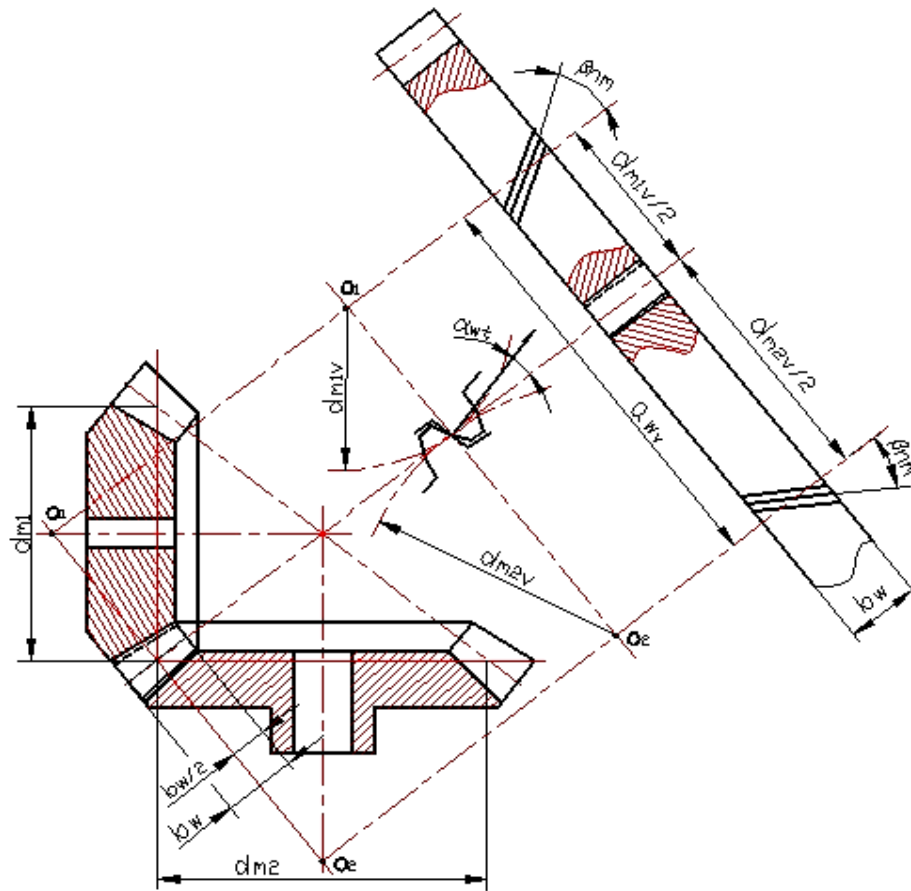


Figura 1. Transmisión cónica circular y su cilíndrica virtual.
Transmisión cónica circular. b) Transmisión cilíndrica virtual.

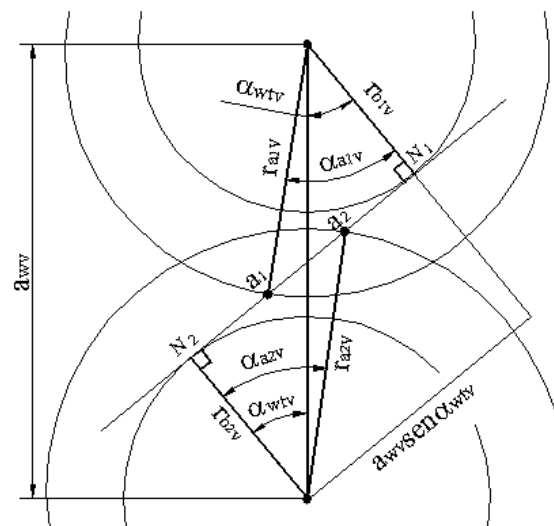


Fig.2. Engranaje cilíndrico virtual (Vista axial).

Sustituyendo las expresiones (5), (6), (7), (8) y (15) en (14):

$$a_1 a_2 = \sqrt{\left(\frac{m_{nm}}{\cos \beta_{nm}} \left(\frac{z_{v1}}{2} + h_a^* + x_1\right)\right)^2 - \left(\frac{m_{nm} z_{v1}}{2 \cos \beta_{nm}} \cos \alpha_t\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{m_{nm}}{\cos \beta_{nm}} \left(\frac{z_{v2}}{2} + h_a^* + x_2\right)\right)^2 - \left(\frac{m_{nm} z_{v2}}{2 \cos \beta_{nm}} \cos \alpha_t\right)^2} - \frac{m_{nm} \cos \alpha_t}{2 \cos \beta_{nm} \cos \alpha_{wtv}} (z_{v1} + z_{v2}) \sin \alpha_{wtv}$$

Extrayendo factor común, se tiene:

$$a_1 a_2 = \frac{m_{nm}}{\cos \beta_{nm}} \left[\sqrt{\left(\frac{z_{v1}}{2} + (h_a^* + x_1)\right)^2 - \left(\frac{z_{v1} \cos \alpha_t}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{z_{v2}}{2} + (h_a^* + x_2)\right)^2 - \left(\frac{z_{v2} \cos \alpha_t}{2}\right)^2} - \left(\frac{z_{v1} + z_{v2}}{2}\right) \tan \alpha_{wtv} \cos \alpha_t \right] \quad (16)$$

Ahora, como:

$$\epsilon_\alpha = \frac{a_1 a_2}{p_{btv}} \quad (17)$$

Sustituyendo (16) y (10) en (17) se obtiene:

$$\epsilon_\alpha = \frac{\frac{m_{nm}}{\cos \beta_{nm}} \left[\sqrt{\left(\frac{z_{v2}}{2} + (h_a^* + x_2)\right)^2 - \left(\frac{z_{v2} \cos \alpha_t}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{z_{v1}}{2} + (h_a^* + x_1)\right)^2 - \left(\frac{z_{v1} \cos \alpha_t}{2}\right)^2} - \left(\frac{z_{v1} + z_{v2}}{2}\right) \tan \alpha_{wtv} \cos \alpha_t \right]}{\frac{m_{nm} \cdot \pi}{\cos \beta_{nm}} \cos \alpha_t}$$

Como $x_1 = -x_2$ porque en los engranajes cónicos se utiliza la corrección en alturas, entonces $\alpha_{wtv} = \alpha_t$, luego:

$$\epsilon_\alpha = \frac{\sqrt{\left(\frac{z_{v1}}{2} + (h_a^* + x_1)\right)^2 - \left(\frac{z_{v1} \cos \alpha_t}{2}\right)^2}}{\pi \cos \alpha_t} + \frac{\sqrt{\left(\frac{z_{v2}}{2} + (h_a^* + x_2)\right)^2 - \left(\frac{z_{v2} \cos \alpha_t}{2}\right)^2}}{\pi \cos \alpha_t} - \frac{z_{v1} + z_{v2}}{2\pi} \tan \alpha_t \quad (18)$$

La expresión anterior es semejante a la obtenida para los engranajes cónicos rectos [2] y engranajes cónicos tangenciales [3].

Para expresar la razón de contacto ϵ_α de forma más compacta, se designará:

$$\epsilon_a = \frac{\sqrt{\left(\frac{z_{v1}}{2} + (h_a^* + x_1)\right)^2 - \left(\frac{z_{v1} \cos \alpha_t}{2}\right)^2}}{\pi \cos \alpha_t}$$

ϵ_a ---Razón de contacto teórico para el piñón.

$$\epsilon_b = \frac{\sqrt{\left(\frac{z_{v2}}{2} + (h_a^* + x_2)\right)^2 - \left(\frac{z_{v2} \cos \alpha_t}{2}\right)^2}}{\pi \cos \alpha_t}$$

ϵ_b ---Razón de contacto teórico para la rueda.

$$\epsilon_c = \frac{z_{v1} + z_{v2}}{2\pi} \tan \alpha_t$$

ϵ_c ---Razón de contacto teórico total. Donde:

$$\epsilon_\alpha = \epsilon_a + \epsilon_b - \epsilon_c$$

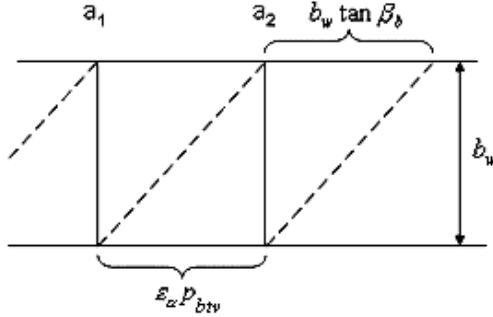


Figura 3. Desarrollo del cilindro base virtual.

Según la Fig. 3, el incremento de la longitud de contacto en el plano transversal, debido al ángulo de la hélice en el cilindro base β_b , viene dado por el valor $b_w \tan \beta_b$. Este incremento dividido por el p_{btv} se denomina coeficiente de recubrimiento axial virtual ϵ_β , es decir:

$$\epsilon_\beta = \frac{b_w \tan \beta_b}{p_{btv}}$$

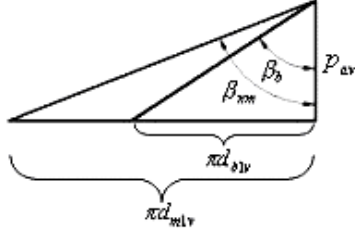


Figura 4. Relación entre los ángulos de hélice sobre los cilindros base y de referencia virtuales.

Según la Figura 4 se pueden establecer las siguientes relaciones entre los ángulos de hélice de los cilindros de referencia y base:

$$\tan \beta_b = \frac{\pi d_{blv}}{p_{av}} \Rightarrow p_{av} = \frac{\pi d_{blv}}{\tan \beta_b} \quad (19)$$

$$\tan \beta_{nm} = \frac{\pi d_{mlv}}{p_{av}} \Rightarrow p_{av} = \frac{\pi d_{mlv}}{\tan \beta_{nm}} \quad (20)$$

Igualando (19) con (20):

$$\frac{\pi d_{blv}}{\tan \beta_b} = \frac{\pi d_{mlv}}{\tan \beta_{nm}} \Rightarrow \tan \beta_b = \frac{\tan \beta_{nm} \cdot \pi d_{blv}}{\pi d_{mlv}}$$

$$\tan \beta_b = \frac{\tan \beta_{nm} \cdot d_{mlv} \cos \alpha_{lv}}{d_{mlv}}$$

$$\tan \beta_b = \tan \beta_{nm} \cos \alpha_t \quad (21)$$

Sustituyendo (21) en la expresión de ϵ_β :

$$\epsilon_\beta = \frac{b_w \tan \beta_{nm} \cos \alpha_t}{p_{btv}}$$

$$\epsilon_\beta = \frac{b_w \sin \beta_{nm} \cos \alpha_t}{\frac{m_{nm} \pi}{\cos \beta_{nm}} \cos \beta_{nm} \cos \alpha_t}$$

$$\epsilon_\beta = \frac{b_w \sin \beta_{nm}}{m_{nm} \pi} \quad (22)$$

Ahora se puede escribir definitivamente la formula para el cálculo de la razón de contacto total en una transmisión por engranajes cónicos circulares, de la forma siguiente:

$$\epsilon_\gamma = \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta \quad (23)$$

Se recomienda que ϵ_β sea ≥ 1.25 para engranajes cónicos circulares en general y ≥ 1.6 cuando se exige una marcha suave [1]. Es también recomendable que $\epsilon_\alpha \geq 1.1$. Lo anterior conduce a que $2.35 \leq \epsilon_\gamma \leq 2.85$.

4. Forma 2.

La siguiente es otra forma de calcular el ϵ_α en los engranajes cónicos circulares. La misma se diferencia de la anterior por el empleo de los ángulos de la evolvente de los dientes en sus diámetros exteriores α_{a1v} y α_{a2v} , ver Figura 2:

Donde:

$$\alpha_{a1v} = \cos^{-1} \left(\frac{r_{b1v}}{r_{a1v}} \right) \quad (24)$$

$$\alpha_{a2v} = \cos^{-1} \left(\frac{r_{b2v}}{r_{a2v}} \right) \quad (25)$$

Haciendo uso de la Figura 2, se puede plantear que la longitud de la línea práctica de engranaje $a_1 a_2$ viene dada por:

$$a_1 a_2 = a_{wv} \sin \alpha_{wtv} - (N_2 a_1 + N_1 a_2) \quad (26)$$

Expresando $N_2 a_1$ y $N_1 a_2$ en función de α_{a1v} , α_{a2v}

$$N_2 a_1 = a_{wv} \sin \alpha_{wtv} - r_{b1v} \tan \alpha_{a1v} \quad (27)$$

$$N_1 a_2 = a_{wv} \sin \alpha_{wtv} - r_{b2v} \tan \alpha_{a2v} \quad (28)$$

Sustituyendo (27) y (28) en (26), se obtiene:

$$a_1 a_2 = a_{wv} \operatorname{sen} \alpha_{wv} - (a_{wv} \operatorname{sen} \alpha_{wv} - r_{b1v} \tan \alpha_{a1v}) - (a_{wv} \operatorname{sen} \alpha_{wv} - r_{b2v} \tan \alpha_{a2v})$$

$$a_1 a_2 = r_{b1v} \tan \alpha_{a1v} + r_{b2v} \tan \alpha_{a2v} - a_{wv} \operatorname{sen} \alpha_{wv}$$

Sustituyendo la expresión (5), (6) y (15) en (29):

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &= \frac{m_{nm} z_1 \cos \alpha_t}{2 \cos \beta_{nm} \cos \delta_1} \tan \alpha_{a1v} + \frac{m_{nm} z_2 \cos \alpha_t \tan \alpha_{a2v}}{2 \cos \beta_{nm} \cos \delta_2} - \frac{m_{nm} \cos \alpha_t \operatorname{sen} \alpha_{wv}}{2 \cos \beta_{nm} \cos \alpha_{wv}} (z_{v1} + z_{v2}) \\ a_1 a_2 &= \frac{m_{nm} \cos \alpha_t}{2 \cos \beta_{nm}} (z_{v1} \tan \alpha_{a1v} + z_{v2} \tan \alpha_{a2v} - z_{v1} \tan \alpha_{wv} - z_{v2} \tan \alpha_{wv}) \\ a_1 a_2 &= \frac{m_{nm} \cos \alpha_t}{2 \cos \beta_{nm}} (z_{v1} (\tan \alpha_{a1v} - \tan \alpha_{wv}) + z_{v2} (\tan \alpha_{a2v} - \tan \alpha_{wv})) \end{aligned} \quad (30)$$

Sustituyendo (10) y (29) en (17) se obtiene:

$$\epsilon_\alpha = \frac{m_{nm} \cos \alpha_t (z_{v1} (\tan \alpha_{a1v} - \tan \alpha_{wv}) + z_{v2} (\tan \alpha_{a2v} - \tan \alpha_{wv}))}{2 \cos \beta_{nm} \frac{m_{nm} \pi \cos \alpha_t}{\cos \beta_{nm}}}$$

Y recordando que $\alpha_{wv} = \alpha_t$, definitivamente se logra la segunda forma de expresión de ϵ_α :

$$\epsilon_\alpha = \frac{z_{v1} (\tan \alpha_{a1v} - \tan \alpha_t) + z_{v2} (\tan \alpha_{a2v} - \tan \alpha_t)}{2\pi} \quad (31)$$

Donde:

$$\alpha_{a1v} = \cos^{-1} \left(\frac{\cos \alpha_t}{1 + \frac{2z_2 \cos \beta_m (h_a^* - x_1)}{z_1 \sqrt{z_2^2 + z_1^2}}} \right) \quad \text{y} \quad \alpha_{a2v} = \cos^{-1} \left(\frac{\cos \alpha_t}{1 + \frac{2z_1 \cos \beta_m (h_a^* - x_2)}{z_2 \sqrt{z_2^2 + z_1^2}}} \right)$$

En este caso en vez de expresarse la razón de contacto transversal ϵ_α a lo largo de la línea de engranaje, se expresa a través de los arcos de contacto sobre la circunferencia de referencia del piñón y la rueda, lo cual está expresado por los dos sumandos de la fórmula anterior.

Al igual que para la Forma 1, en la Forma 2, ϵ_γ es válida la expresión (17), pero usando el ϵ_α de la expresión (31).

5. Conclusiones.

- La razón de contacto total, esta compuesta de dos razones de contacto parciales, ϵ_α y ϵ_β . ϵ_α basado en la Forma 1, es función de los parámetros de la herramienta y los números de dientes virtuales, (ver fórmula 18).
- Según la Forma 2 ϵ_α es también función de los números de dientes virtuales así como el ángulo de engranaje virtual y los ángulos de la evolvente de los dientes en sus diámetros exteriores, (ver fórmula 31).

- El parámetro ε_β es común en ambas Formas y el mismo depende del ancho de la rueda, el ángulo de la hélice en un plano normal medio así como el modulo normal medio del engranaje, ver fórmula (22).

6. Bibliografía.

1. GOST 19326-73: Transmisiones dentadas cónicas con dientes circulares. Calculo de la geometría. Editorial soviética 1974.
2. Yuri Golubev; Teoría de Maquinas y Mecanismos. Ediciones R, Instituto Cubano del Libro, Cuba 1967.
3. B.N.Neddrinski: Maquinas para la Elaboración de Ruedas Dentadas Cónicas. Editorial Machguiz 1958.

Contact Rate in circular Bevel gears.

The present paper expresses a deductive analysis of the expressions that allow the evaluation of the rate of total contact in the conical circular engagements. The analysis has been carried out making use of the respective cylindrical virtual transmission. Two equivalent formulate are obtained, only differ in some of the parameters that conform them. Each one of these formulas is based on different forms of analyzing the rate of total contact and in particular one of their components, the rate of traverse contact. The above-mentioned gives origin to two forms of analysis of the total contact rate.

One of the forms analyzes the contact between the teeth along the line of engagement and the other form analyzes the contact through the arches of contact corresponding to the circumferences of reference, which coincide with the primitive, in these transmissions.

Key words: Bevel gears, contact rate.