

# Modelación de las cargas de reacción en los apoyos de los árboles de la Transmisión por tornillo sinfín.

**G. Rivero Llerena, J. Tauler Alonso, S. Gaubeca Mesa.**

Departamento de Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería Mecánica  
 Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, CUJAE.  
 Calle 114 N° 11901 e/ 119 y 127 Marianao 15, Ciudad de la Habana. Cuba  
 Email: grivero @ mecanica.cujae.edu.cu  
 Email: tauler @ mecanica.cujae.edu.cu

(Recibido el 21 de Diciembre de 2005, aceptado el 10 de Enero de 2006)

## Resumen.

El análisis y cálculo de las cargas que se generan en los apoyos de los árboles de los conjuntos mecánicos rotatorios, resulta un proceso complejo pero imprescindible en la tarea de selección de los rodamientos, por ello en el presente trabajo se propone el uso de las NTIC como herramientas efectivas de diseño y modelación para la solución de este problema. En esta investigación se trata el caso de la transmisión por tornillo sinfín por su importancia en los accionamientos industriales y en otros campos, se ha formalizado en tres modelos, el análisis de las cargas de operación y de reacción que se producen durante el funcionamiento. Se presentan los resultados que puede brindar el software de cálculo creado, usando el paquete de información que contiene la modelación realizada para obtener una respuesta ágil y exacta de las cargas de reacción resultantes en los apoyos de árboles.

**Palabras claves:** Sinfín, rodamiento, modelación.

## 1. Introducción.

Los engranajes constituyen un recurso muy antiguo para transmitir el movimiento rotatorio de los árboles de las máquinas y mecanismos. Cuando la disposición de estos árboles es cruzada y se necesitan grandes multiplicaciones de torque con sólo una etapa de multiplicación, se prefiere la transmisión por tornillo sinfín. En este tipo de transmisión, la rotación de la rueda sinfín sobre su eje se produce por la acción de la cuña del helicoides del tornillo debido a la propia geometría del par engranado, así el movimiento de rotación del helicoides se traduce en un efecto de sucesivas cremalleras cuyos perfiles avanzan en la dirección axial del tornillo, con lo cual se obtiene una operación continua y con poco ruido.

La interacción entre los filetes del tornillo y los dientes de la rueda se establece teóricamente en el punto de tangencia de los diámetros de referencia de ambos elementos. Partiendo de un torque motor ( $M_1$ ) a una determinada frecuencia de rotación ( $n_1$ ), las cargas generadas [1] son las mostradas en la figura 1.

De esta forma se obtiene el resultado esperado al ser vencido el torque reactivo ( $M_2$ ) con lo que se logra el accionamiento de una máquina o mecanismo.

Al tratarse de una transmisión espacial se generarán tres cargas en la zona de acción del engranaje cuyos valores dependerán del torque ( $M_2$ ) y del diámetro de referencia ( $d_2$ ) de la rueda [2].

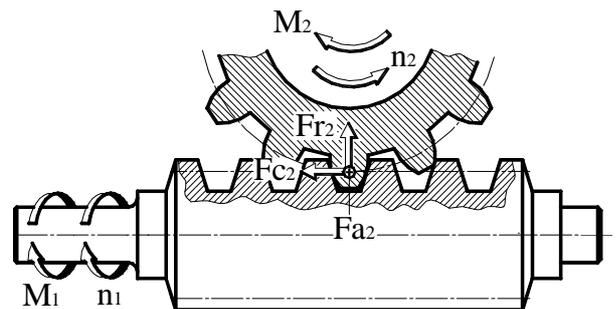


Figura.1 Cargas de operación de la transmisión representadas en el plano axial del tornillo.

La presente comunicación propone la aplicación de la ingeniería concurrente para la obtención de las cargas de reacción resultantes en los apoyos de los árboles como consecuencia de las cargas de operación del engranaje, por lo que se confeccionarán modelos para la determinación de cargas de acción y reacción teniendo en cuenta todas las posibilidades cinemáticas de la

transmisión. Su utilidad práctica está vinculada al proceso de selección de los rodamientos que sirven de apoyo y reducen casi a cero la fricción, aspecto que será tratado en otro trabajo posterior.

**2. Método y materiales.**

El método no pierde generalidad al despreciar las fuerzas de resistencia inútil (fricción) entre los flancos activos del engranaje puesto que el error que así se introduce no tiene gran repercusión en los resultados que se esperan, en consecuencia hay una reducción de la complejidad del análisis al poder plantearse la reciprocidad entre las cargas de operación, por lo que se dan las siguientes equivalencias [2] [3].

$$F_{c2} = -F_{a1} \tag{1}$$

$$F_{a2} = -F_{c1} \tag{2}$$

$$F_{r2} = -F_{r1} \tag{3}$$

La vinculación de estas cargas de operación con el valor de la relación de transmisión, y además con el torque y el diámetro de referencia de la rueda, permite la formalización de su cálculo mediante el siguiente

**Modelo matemático 1**

$$1) F_{a1} = (M_2 / d_2) \cdot 2000$$

$$2) F_{c2} = (M_2 / d_2) \cdot 2000 \tag{4}$$

$$3) F_{r2} = (M_2 / d_2) \cdot C_a$$

$$4) F_{c1} = (M_2 / d_2) \cdot C_b$$

Donde:

- $F_{a1}$ : Carga axial producida sobre el tornillo [N].
- $F_{c2}$ : Carga tangencial producida sobre la rueda [N].
- $F_{r2}$ : Carga en la dirección radial de la rueda [N].
- $F_{c1}$ : Carga tangencial producida sobre el tornillo [N].
- $M_2$ : Torque que entrega la rueda [N-m].
- $d_2$ : Diámetro de referencia de la rueda [mm].
- $C_a$ : Factor de cálculo.
- $C_b$ : Factor de cálculo.
- $_1$  - Relativo al tornillo.
- $_2$  - Relativo a la rueda.

Los factores  $C_a$  y  $C_b$  están asociados [4] a un rango de valores de relación de transmisión, (ver tabla 1).

Tabla 1. Factores de cálculo de cargas.

Relación de transmisión	Factor	
	$C_a$	$C_b$
<b>i</b>		
6.7 – 12.5	880	790
14.0 – 26.0	450	740
28.0 – 53.0	250	730
61.0 – 110.0	180	730

Así las ecuaciones (4) muestran el primer modelo matemático, el que permite obtener la magnitud de las

cargas de operación del engranaje. El mismo está compuesto por cuatro relaciones y ocho variables, que expresadas simbólicamente será como sigue.

$$m_1 \equiv \langle r_1, v_1 \rangle ; r_1 = 4, v_1 = 8.$$

**2.1. Carácter de las cargas de reacción en los apoyos.**

La solución para los apoyos de los árboles puede ser en una estructura abierta, aunque existe una mayor generalización de las estructuras cerradas (carcasas), las cuales constituyen el albergue de la transmisión favoreciendo las soluciones para la lubricación. El tamaño de la carcasa depende en primer lugar de la distancia ( $a_w$ ) entre los ejes de rotación del tornillo sinfín y la rueda [5].

Las dimensiones y composición particulares de la carcasa, el tornillo y la rueda, así como un correcto diseño de los apoyos de los árboles, deben ser tales que satisfagan las necesidades de soportar las cargas de operación y de reacción durante el funcionamiento con la suficiente rigidez en la zona de engranaje.

La figura 2 muestra la rueda por su plano axial el que resulta ser perpendicular al eje del árbol-tornillo, aquí se representan las cargas de reacción que tienen lugar debido a la influencia de la zona de engranaje [2] [5] distinguiéndose la carga radial ( $F_r$ ) del apoyo visible del tornillo y las de los dos apoyos del árbol de la rueda ( $F_{III}$  y  $F_{IV}$ ), además de la reacción axial del árbol de la rueda ( $F_{a2}$ ) y la del tornillo ( $F_{a1}$ ).

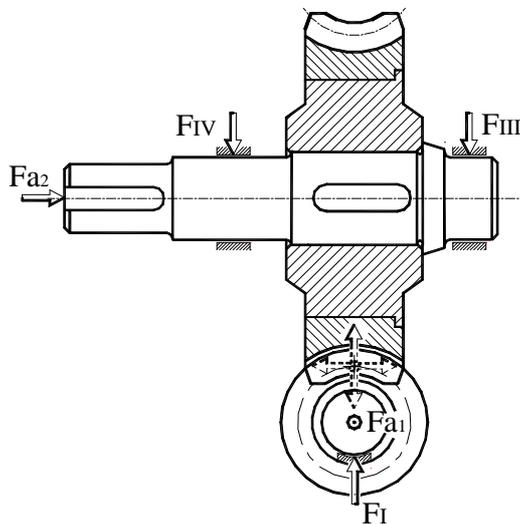


Figura2. Cargas de reacción en los apoyos de los arboles.

La distancia ( $L_2$ ) entre las reacciones de los apoyos III y IV del árbol de la rueda, debe ser tal que garantice la condición de aportar suficiente momento reactivo ante las cargas en voladizo de sollicitación externa y al mismo tiempo, limitar la magnitud del momento flector en el árbol por razones de rigidez. Una recomendación [2] para esta distancia es:

$$L_2 = 0,76 a_w \tag{5}$$

La figura 1 muestra la vista de la transmisión por el plano axial del tornillo y perpendicular al eje del árbol de la rueda, aquí podría acotarse la distancia ( $L_1$ ) entre las reacciones de apoyo correspondientes, la que decide el grado de rigidez del subconjunto del tornillo. Se recomienda [2] para esta distancia:

$$L_1 = 3,3 a_w^{0,87} \tag{6}$$

**2.2. Cargas en el plano radial del rodamiento.**

Generalmente como soluciones de apoyo de árboles, estas transmisiones utilizan rodamientos. Observando la ortogonalidad entre los planos del tornillo y la rueda, se tiene que la carga resultante ( $F_R$ ) generada en el plano radial de cada rodamiento no es paralela [6] a ninguno de los citados planos, ver la figura 3.

En la figura 4 se tiene una representación espacial de la transmisión donde se destacan cargas y distancias. Para la solución del problema de la determinación de todas las cargas reactivas en cada uno de los apoyos de

los dos árboles, que luego permitirán la obtención de la carga radial resultante ( $F_R$ ) generada en cada rodamiento, se emplea en esta investigación el esquema de la figura 4 con la siguiente nomenclatura:

- a) Tramos de árboles ( $L_1, l_1, l_{II}, L_2, l_{III}, l_{IV}$ ).
- b) Cargas concurrentes en los apoyos (ver la tabla 2).

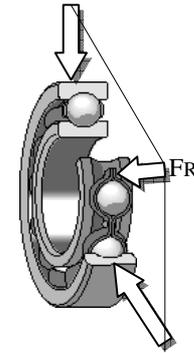


Figura 3. Carga radial resultante  $F_R$  en el rodamiento.

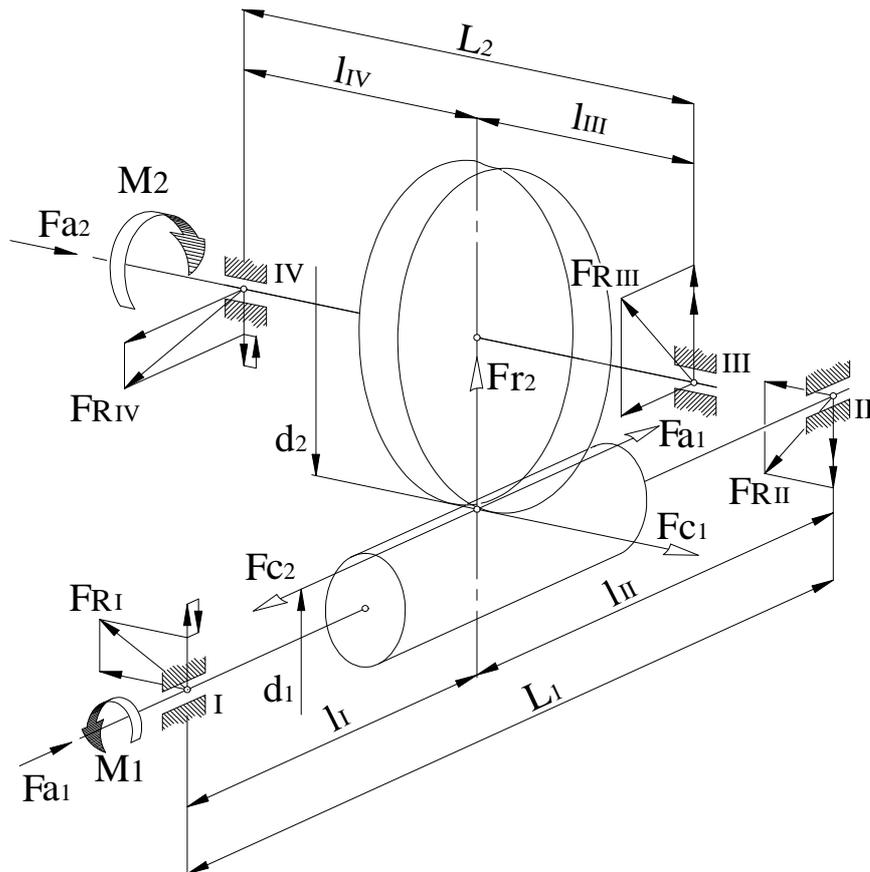


Figura 4. Esquema simplificado de una transmisión por tornillo sinfín (tornillo con helicoide hacia la izquierda).

Tabla 2. Cargas de reacción radial en cada apoyo.

Apoyo	Carga reactiva radial		Carga de operación que le da origen
	dirección	nombre	
I	H 1	$F_{Ic}$	Tangenc. del tornillo
	V 2	$F_{Ia}$	Axial del tornillo
	V 3	$F_{Ir}$	Radial del tornillo
II	H 4	$F_{IIc}$	Tangenc. del tornillo
	V 5	$F_{IIa}$	Axial del tornillo
	V 6	$F_{IIr}$	Radial del tornillo
III	H 7	$F_{IIIc}$	Tangenc. de la rueda
	V 8	$F_{IIIa}$	Axial de la rueda
	V 9	$F_{IIIr}$	Radial de la rueda
IV	H 10	$F_{IVc}$	Tangenc. de la rueda
	V 11	$F_{IVa}$	Axial de la rueda
	V 12	$F_{IVr}$	Radial de la rueda

H: horizontal, V: vertical, 1,2,3....12 n° de la expresión de cálculo

Aplicando las ecuaciones de equilibrio se obtiene el:

### Modelo matemático 2

$$\begin{aligned}
 1) F_{Ic} &= \frac{F_{c1} \cdot l_{II}}{L_1} & 7) F_{IIIc} &= \frac{F_{c2} \cdot l_{IV}}{L_2} \\
 2) F_{Ia} &= \frac{F_{a1} \cdot d_1}{2 \cdot L_1} & 8) F_{IIa} &= \frac{F_{c1} \cdot d_2}{2 \cdot L_2} \\
 3) F_{Ir} &= \frac{F_r \cdot l_{II}}{L_1} & 9) F_{IIIr} &= \frac{F_r \cdot l_{IV}}{L_2} \\
 4) F_{IIc} &= \frac{F_{c1} \cdot l_1}{L_1} & 10) F_{IVc} &= \frac{F_{c2} \cdot l_{III}}{L_2} \quad (7) \\
 5) F_{IIa} &= \frac{F_{a1} \cdot d_1}{2 \cdot L_1} & 11) F_{IVa} &= \frac{F_{a1} \cdot d_2}{2 \cdot L_2} \\
 6) F_{IIr} &= \frac{F_r \cdot l_I}{L_1} & 12) F_{IVr} &= \frac{F_r \cdot l_{III}}{L_2}
 \end{aligned}$$

La utilidad de este segundo modelo matemático es la evaluación de las cargas concurrentes en el plano radial de cada uno de los rodamientos, el mismo está compuesto por 12 relaciones y 24 variables teniendo la siguiente representación simbólica.

$$m_2 \equiv \langle r_2, v_2 \rangle ; r_2 = 12, v_2 = 24.$$

### 2.3. Magnitud, dirección y sentido de la resultante.

Como puede apreciarse en la figura 4, la dirección de las cargas de reacción obtenidas de la aplicación del modelo 2 será horizontal o vertical en concordancia con

los planos del tornillo y de la rueda, sin embargo la interpretación del sentido de las mismas presenta un mayor nivel de complejidad porque esto resulta gobernado por la rotación del tornillo y la inclinación de su helicoide [5] y en consecuencia las cargas de operación  $F_{c1}$  y  $F_{a1}$  tendrán dos posibles sentidos. Obviamente la carga  $F_{r1}$  no entra en esta valoración.

El análisis de las alternativas dadas para el sentido de la carga tangencial ( $F_{c1}$ ) es posible con ayuda de la lógica bivalente, usando el predicado siguiente:

$S = 1$  si el signo es positivo.

$S = 0$  si el signo es negativo.

El predicado atómico ha sido definido como:

$rt \equiv$  el tornillo rota en sentido horario (dextrógiro).

$ht \equiv$  el sentido del helicoide es hacia la derecha.

Tabla veritativa.

Caso	rt	ht	S
a	1	1	1
b	1	0	0
c	0	1	0
d	0	0	1

El cuadro de la figura 5 muestra los cuatro casos. Aquí se aprecia que en los casos (a) y (d) el sentido de la carga  $F_{c1}$  es hacia la derecha lo que guarda relación con la tabla veritativa. Para cerrar el análisis se ha de valorar el sentido del efecto-cremallera del helicoide bajo el giro ( $n_1$ ), así la carga axial  $F_{a1}$  del tornillo irá hacia el apoyo I o hacia el II según se indica a continuación.

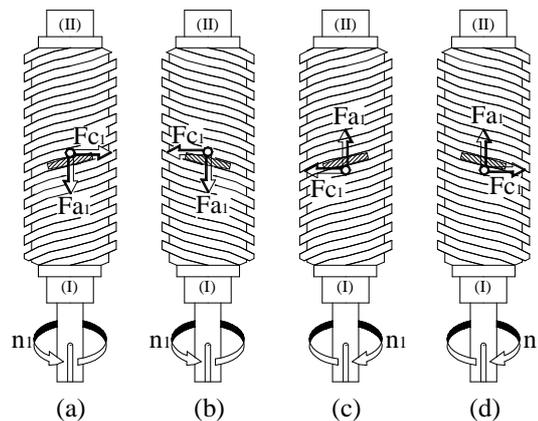


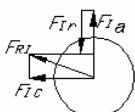
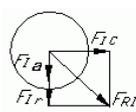
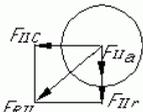
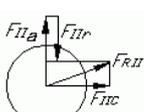
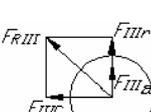
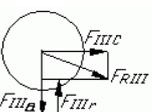
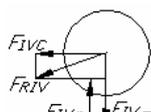
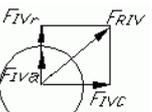
Figura 5. Sentido de las cargas axiales y tangenciales.

El lector puede usar las relaciones (1) y (2) a fin de decidir el sentido de estas dos cargas para la rueda, además puede interpretar el sentido de rotación de la misma ( $n_2$ ) orientándose por las figuras 1 y 5 (por ejemplo en la representación actual de la figura 1 se expone el caso **C** con la rueda en sentido levógiro).

En la práctica, generalmente se ven los tornillos con helicoide hacia la derecha [7] y por otro lado existen muchos mecanismos cuya operación se realiza con reversión del giro (contramarcha) [7], esto sugiere la simplificación del presente análisis por lo que en lo adelante se tratarán tan solo los casos a y c.

Como tienen lugar los modelos matemáticos 2 y 1, se han formalizado los últimos razonamientos sobre la determinación del sentido para obtener en efecto, la magnitud de la carga radial resultante en dependencia de la rotación del tornillo, en consecuencia se creó el:

**Modelo matemático 3**

	Dextrógiro	Levógiro
a p o y o		
I	$F_{RI} = \sqrt{F_{Ic}^2 + (F_{Ia} - F_{Ir})^2}$	$F_{RI} = \sqrt{F_{Ic}^2 + (F_{Ia} + F_{Ir})^2}$
a p o y o		
II	$F_{RII} = \sqrt{F_{IIc}^2 + (F_{IIa} + F_{IIr})^2}$	$F_{RII} = \sqrt{F_{IIc}^2 + (F_{IIa} - F_{IIr})^2}$
a p o y o		
III	$F_{RIII} = \sqrt{F_{IIIc}^2 + (F_{IIIa} + F_{IIIr})^2}$	$F_{RIII} = \sqrt{F_{IIIc}^2 + (F_{IIIa} - F_{IIIr})^2}$
a p o y o		
IV	$F_{RIV} = \sqrt{F_{IVc}^2 + (F_{IVa} - F_{IVr})^2}$	$F_{RIV} = \sqrt{F_{IVc}^2 + (F_{IVa} + F_{IVr})^2}$

Lo fundamental de este tercer modelo matemático es que, según el sentido de las cargas concurrentes permite obtener la magnitud de la reacción resultante ( $F_R$ ) en cada apoyo. Su composición de 8 relaciones y 18 variables tiene la representación simbólica:

$$m_3 \equiv \langle I_3, v_3 \rangle ; r_3 = 8, v_3 = 18.$$

**3. Resultados.**

Para cumplimentar el propósito de esta investigación se integraron en un solo paquete los tres modelos matemáticos creados, formalizándose un sistema general

para el cálculo de las reacciones en cada uno de los apoyos de los dos árboles. El medio utilizado fue el programa Microsoft Visual Basic versión 6.0 [8], con el resultado expuesto en la figura 6.

Para la utilización de este programa de cálculo el usuario deberá ofrecer como datos de entrada el torque que sale de la rueda ( $M_2$ ), el diámetro de referencia de la misma ( $d_2$ ), así como el del tornillo ( $d_1$ ), los tramos de árboles ( $L_1, l_1, L_2, l_{III}$ ) y el valor de la relación de transmisión ( $i$ ).

Para la obtención de los resultados correctos, el usuario debe verificar que el sentido de rotación seleccionado para el tornillo, corresponda con el real ya que esto influye en la magnitud y sentido de las cargas que se generan en los apoyos. En caso de que por algún descuido no se introduzcan valores en las casillas de entradas de datos, el programa mostrará un mensaje recordatorio que ayudará a obtener un funcionamiento correcto del mismo.

Luego de la entrada de datos, al presionar sobre el botón aceptar en el propio formulario, se observan los resultados de las cargas de operación ( $F_{a1}, F_{c1}, F_r$ ) y los de las cargas radiales de reacción resultantes en cada uno de los apoyos ( $F_{RI}, F_{RII}, F_{RIII}, F_{RIV}$ ), todas expresadas en Newton.

Al variar el sentido de rotación del tornillo, aparecen nuevos resultados con apreciables diferencias.

**4. Discusión de resultados.**

Una característica importante del programa es que utiliza de manera secuencial los modelos matemáticos 1, 2 y 3 con un pequeño número de variables de entrada solicitadas al usuario (tres del modelo 1, cinco del modelo 2 y una del modelo 3), esta última se refiere a la rotación del tornillo, que en la mayoría de los casos es acoplado directamente al motor eléctrico que le transfiere su propio sentido de rotación.

Como se explicó antes, el programa sólo resuelve los casos a y c de la figura 5 de acuerdo con lo que ocurre generalmente en la práctica, en el supuesto de un tornillo sinfín cuya helicoide sea a la izquierda, ya este trabajo deja trillado el campo de la solución con los razonamientos aquí expuestos y el empleo de la información contenida en las figuras 4 y 5, las que ayudan a la intuición del usuario para la correcta interpretación de las direcciones y sentidos de las cargas concurrentes en cada uno de los dos apoyos, de cada árbol. Se han realizado corridas de este programa con varios casos que han sido resueltos por otros procedimientos y se han obtenido resultados con margen de error menor de 1.2 %.

**Cálculo de las Cargas en los apoyos de las Transmisiones Sinfin.**

**Datos Generales de la Transmisión**

Torque de salida M2:  [N.m]

Diametro de referencia de la Rueda d2:  [mm]

Diámetro de referencia del Tornillo d1:  [mm]

**Relación de Transmisión**

6.7 - 12.5
14 - 26
28 - 53
61 - 110

i:

**Sentido de rotación del Tornillo**

Horario

Antihorario

**Nota: La hélice del Tornillo es derecha**

**Posición de los apoyos del Tornillo**

L1:  [mm]

l<sub>I</sub>:  [mm]

**Posición de los apoyos de la Rueda**

L2:  [mm]

l<sub>III</sub>:  [mm]

**Esquema de la Transmisión**

**Resultados de cargas de operación**

Cargas en el engranaje	Reacciones en los apoyos
F <sub>a1</sub> : 33333.333 [N]	F <sub>R I</sub> : 4700.030 [N]
F <sub>c1</sub> : 7500.000 [N]	F <sub>R II</sub> : 10213.349 [N]
F <sub>r</sub> : 12333.333 [N]	F <sub>R III</sub> : 24106.390 [N]
	F <sub>R IV</sub> : 17424.639 [N]

Figura 6. Interfaz del programa para el cálculo de las cargas radiales de reacción resultantes en los apoyos.

## 5. Conclusiones.

1. El modelo matemático 1 muestra que las cargas que se producen en la operación del engranaje de tornillo sin fin, pueden ser conocidas a partir de tan sólo tres variables iniciales:  $i$ ,  $M_2$  y  $d_2$ .
2. En las magnitudes de las cargas de reacción que concurren en el plano radial de cada uno de los rodamientos, influyen decisivamente el sentido de las cargas de operación del engranaje y las distancias entre los propios rodamientos.
3. El depender solamente de la intuición, puede conducir a errores de cálculo muy graves en la apreciación del sentido de las cargas de operación. La representación de la figura 5, que para este trabajo fue realizada con la observación de transmisiones reales, sirve de ayuda para esto.
4. El sentido de rotación del tornillo así como la inclinación de su helicoides, tienen influencia en el valor de  $F_R$ , lo cual debe ser considerado al seleccionar rodamientos para transmisiones que funcionan con reversión del giro.
5. El modelo matemático 2 muestra que resulta posible la proyección de rodamientos de menores dimensiones (menor valor de  $F_R$ ) aumentando las distancias entre apoyos  $L_1$  y  $L_2$ , sin embargo este proceder pone en riesgo los criterios de rigidez necesaria planteados en las relaciones (5) y (6).
6. Con la creación del programa de cálculo de cargas radiales de reacción, se ha automatizado el procedimiento con gran sencillez para el usuario, brindando resultados exactos y considerable ahorro de tiempo.
7. Los resultados de esta investigación contribuyen en gran medida, al proceso de cálculo de selección de rodamientos para la transmisión por tornillo sin fin, puesto que las cargas axiales que también actúan en los apoyos, se obtienen de forma indirecta en el programa de cálculo creado.
8. La presente comunicación deja abiertas las puertas para la modelación del cálculo de cargas de reacción, surgidas en otros casos de conjuntos mecánicos rotatorios con árboles de dos apoyos.

## 6. Referencias bibliográficas.

1. Simon, V. Load distribution in cylindrical Worm gears, 43 pp, ASME. Baltimore, Maryland, 2000.
2. Niemann, G. Tratado teórico práctico de elementos de máquinas, 778 pp, Ed. Labor S. A. Barcelona, 1967.
3. Reshetov, D. Elementos de Máquinas, 449 pp, Ed. Mir Moscú, 1981.
4. Atlanta: Catálogo de normas de transmisiones mecánicas. 155 pp, Alemania 1991.
5. Rivero, G. Determinación del Factor de contacto entre flancos del engranaje por tornillo sinfín con perfil Derivado de cono. 116 pp, Tesis de Doctorado. Tutor Dr. Luis Martínez. CUJAE, C. Habana, 2002.
6. SKF. Interactive Engineering, Catalogue. 2001
7. Gaubeca, S. Formalización del procedimiento de cálculo de cargas y selección de rodamientos para transmisiones de tornillo sinfín. 52 pp, Trabajo de diploma. Tutor Dr. Gabriel Rivero, Consultante MSc. Jesús Tauler. CUJAE, C. Habana, 2004.
8. García, J., Rodríguez, J.I., Baez, A., Aprenda Visual Basic 6.0 como si estuviera en primero. 105 pp, Universidad de Ingenieros Industriales de San Sebastián, España, 1999.

---

## Reaction loads models in shafts supports of worm gear transmissions.

### Abstract.

The analysis and calculation of the loads generated in the shafts supports of the rotational machines, is a complex but indispensable process in the task of selection rolling bearings. The present paper exposes the use of the NTIC like effective tools of design and modelling in order to solve this problem. The worm gear transmission case is studied in this investigation because their importance in the industrial machinery and other fields, the analysis of the operation and reaction loads has been formalized in three models. Also it is presented the results of software for calculation, using the information package that contains the three models for obtaining an agile and exact answer of the resulting reaction loads in the shafts supports.

**Key words:** Worm gear, bearing, modelling.