Aprendiendo sobre el Método de los Elementos Finitos.

L. L. Otero Pereiro.
Facultad de Ingeniería Mecánica, CUJAE, Calle 114 No. 119001
Marianao, Ciudad de la Habana, Cuba
Teléfono: (537) 260 2267, Fax: 266 3603; 266 3604
E-mail: otero@mecanica.cujae.edu.cu
lopmfc@yahoo.com

(Recibido el 21 de Noviembre de 2005; aceptado el 27 de Enero de 2006)

Resumen.

El Método de los Elementos Finitos ha demostrado las amplias posibilidades que posee como herramienta para la solución de problemas de ingeniería y para el análisis de problemas de investigación. Como resultado de ello su empleo tiene una gran difusión en la comunidad de ingenieros, tanto en centros de estudio como en centros de investigación y en empresas de producción. Si esto es así, entonces: ¿Cuál es la razón por la cual se tiene una dependencia tan elevada de los software profesionales aun cuando los costos de adquisición de estos están en el orden de las decenas de miles de dólares y los centros de investigación o las universidades no dedican tiempo y esfuerzos al desarrollo de estos?

Según el punto de vista del autor la realidad es que las habilidades en el uso de un software pueden ser adquiridas por la mayoría de los profesionales en la materia, pero la teoría sobre el método es aun poco entendida por la mayoría, aun cuando hayan aprendido a usar uno de estos programas profesionales. ¿Cuál es la causa? La mayoría no ha alcanzado la comprensión del problema físico y mucho menos separar la herramienta matemática que se emplea para su instrumentación no confundiéndola con el problema físico en sí. Esto se debe en primera instancia a que los textos que se encuentran al alcance de la mayoría no dejan claro ambos aspectos y en segundo lugar porque para lograrlo se requiere del trabajo de un grupo multidisciplinario con dedicación casi exclusiva para esta tarea.

En este trabajo se presentará el problema físico fundamental relacionado con el tema, con una proposición sobre el orden necesario para transmitir el problema físico, separándolo de la herramienta matemática, de tal manera que puedan comprenderse cada uno de ellos por separado.

Palabras claves: Elementos finitos, Matriz de rigidez, Nodos, Grados de libertad.

1. Introducción.

La idea general del método de los elementos finitos es la división de un medio continuo en un conjunto de pequeños elementos interconectados por una serie de puntos llamados nodos. Las ecuaciones que rigen el comportamiento del medio continuo regirán también el del elemento. De esta forma se consigue pasar de un sistema continuo (infinitos grados de libertad), que es regido por una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, a un sistema con un número de grados de libertad finito cuyo comportamiento se modela por un sistema de ecuaciones algebraicas, lineales o no.

Cualquier ingeniero que haya trabajado con un programa de cálculo por elementos finitos para resolver algunos problemas de ingeniería, tiene una idea bastante exacta de lo que significa el planteamiento del párrafo anterior. Hasta puede ser capaz de crear su modelo de cálculo y ejecutar su variante obteniendo una posible solución del mismo. Entonces se puede formular la siguiente interrogante: ¿Dónde radica el problema del conocimiento en el cálculo por elementos finitos? La respuesta clave es que *"muchos conocen como emplear algún programa de cálculo por elementos finitos, pero muy pocos conocen la teoría que sustenta los cálculos"*.

Esta respuesta enmarca dos aspectos importantes, que a criterio del autor son: Como primer gran problema está el hecho de que los programas de cálculo están a disposición de casi todos los profesionales que lo necesiten, los que, habiendo entrenado un poco la forma operativa de preprocesamiento y ejecución obtendrán normalmente una respuesta del programa para la solución del modelo que se está ejecutando, siempre que no se hayan cometido errores en la esencia del problema al confeccionar el modelo o en las condiciones de frontera del mismo. El segundo gran problema es entonces que el usuario normalmente da por buena la solución obtenida, pues como el cálculo por elementos finitos ha tenido en las últimas décadas un elevado auge en la solución de problemas de ingeniería, ¿cómo puede estar mal una respuesta que se haya obtenido sobre la base de la corrida de un programa de esta categoría?

Sin embargo, si se les hace unas preguntas simples a algunos de estos usuarios, algo así como: ¿Por qué usaste este tipo de elemento para hacer el mallado del modelo?, ¿Cuáles son las características físicas de ese tipo de elemento?, ¿Qué condición física es capaz de simular ese elemento que empleaste?, ¿Por qué empleaste ese tipo de malla?, ó ¿Cómo estas seguro de que ese elemento con esa densidad de malla te proporciona la respuesta adecuada? Entonces comienzan realmente a aparecer las dudas. Pero es aun peor si el que pregunta o envía mensajes durante la ejecución o al final de ella es el software que se está empleando, pues con él si que es imposible dialogar. Dígase que el programa informa *"singularidad de la matriz de rigidez global"* o en genuino idioma inglés nos dice "Bad Pivot Ratio in Elements….".

Lo que si es seguro es que la ausencia de respuestas por desconocimiento de la teoría no radica en que los usuarios no quieran aprender. Tal vez hay una parte de ellos que por pereza no se dedican al estudio del problema y piensan que con saber usar uno de estos programas ya tienen todo resuelto, pero otros si han estudiado la teoría, o al menos lo han intentado con mucho esfuerzo y: ¿Cuál es el resultado?, ¿Cuánto han podido aprender sobre la teoría del cálculo por elementos finitos? Hágase entonces una pregunta considerada aun más importante. ¿Cuánto ayudan los libros escritos al respecto para la comprensión de la teoría sobre el análisis por elementos finitos?

La opinión del autor es que en la respuesta a esta última interrogante está la clave del problema, ya que en esencia, la teoría del cálculo por elementos finitos tiene dos aspectos fundamentales, "la física del problema" y "la matemática necesaria para manipular y plantear en forma de modelos matemáticos el problema físico". Hay que hacerle comprender a los que estudian el método una teoría desarrollada desde los años 40 sobre la base de la **Mecánica del Medio Continuo,** implementada sobre modelos matemáticos que manipulan una teoría que no es común para los ingenieros, como son los métodos variacionales, los residuos ponderados, los principios de energía mínima y otros.

Por si esto fuera poco los clásicos más leídos sobre el tema ya en las primeras 20 páginas manipulan términos como Funciones de Interpolación, Método de Rayleigh, Método de Ritz, Método de Gauss, Método de Galerkin, Método de Biezeno – Koch, Ensamblaje y Análisis de una Estructura y así sucesivamente, cuando aún el lector ni tan siquiera conoce cual es el significado físico de la Matriz de Rigidez y de los coeficientes de la misma, cuando aun desconoce como ensamblar la Matriz de Rigidez de un Elemento o como obtener los valores de los coeficientes de la Matriz de Rigidez de un elemento. ¿Cómo puede entender alguien los primeros conceptos que están más relacionados con la matemática, cuando aun ni tan siquiera se ha hablado de los verdaderos fundamentos básicos del Método de los Elementos Finitos?

¿Cómo puede un ingeniero relacionar los problemas específicos del método con la herramienta matemática necesaria si no conoce la física del problema? Se comenzará aquí entonces con el análisis de la física del problema y de los conceptos básicos sin los cuales, será prácticamente imposible llegar a dominar la Teoría del Análisis por Elementos Finitos.

2. Fundamentos Básicos.

Al iniciar el proceso de cálculo de una estructura el ingeniero debe formular un *Esquema de Cálculo* para la misma, en otras palabras, un Modelo de Cálculo en el que la estructura es idealizada de manera que pueda ser analizada (Figura 1). Esto se debe en esencia a que el método de los elementos finitos supone, para solucionar el problema, el dominio discretizado en subdominios denominados elementos**,** de forma que el dominio total en estudio se aproxime mediante el conjunto de elementos en que se subdivide. Los elementos se definen por un número discreto de puntos, llamados *nodos*, que los conectan entre si. Sobre estos nodos se materializan las variables de salida fundamentales del problema.

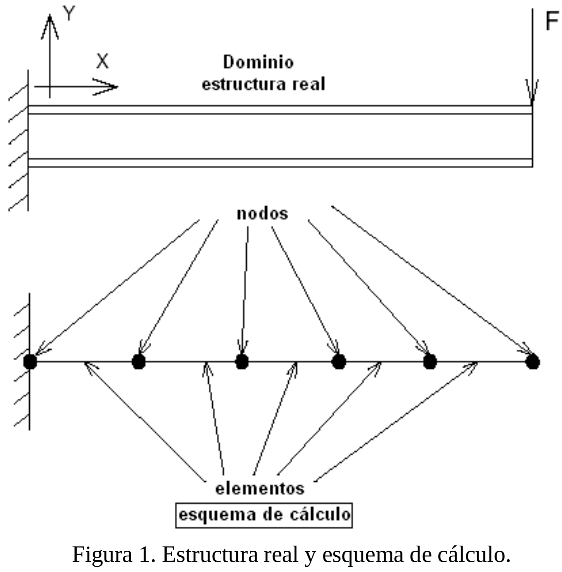


Figura 1. Estructura real y esquema de cálculo.

En el caso de elementos estructurales estas *variables de salida fundamentales* son los *desplazamientos nodales*, ya que a partir de éstos se pueden calcular el resto de las variables de salida que sean de interés. Estas variables de salida se definen en la dirección de los *grados de libertad* de cada nodo del modelo (degree of freedom DOF). Los grados de libertad de un nodo son las variables que determinan el estado del nodo.

El sistema, debido a las condiciones de contorno, en este caso empotramiento y fuerza concentrada en el otro extremo de la viga, evoluciona hasta un estado final. En este estado final, conocidos los valores de los grados de libertad de los nodos del sistema, se puede determinar cualquier otra variable de salida o incógnita deseada, como las fuerzas, tensiones, deformaciones, etc.

Todos los problemas estructurales se enmarcan dentro de los *problemas de contorno*. Un *Problema de Contorno* es aquel que está gobernado por una o más ecuaciones diferenciales o integrales dentro de un dominio, y por *condiciones de contorno* en la frontera de dicho dominio. La solución puede obtenerse buscando la condición extrema de un funcional, o de un conjunto de funcionales, sobre el dominio completo. Pero obviamente ahora no se hablará de este aspecto para poder demostrar como sin referirse a estos temas complejos de la matemática puede explicarse la física del problema.

Considere también que el análisis estructural probablemente es la aplicación más común del método de los elementos finitos. El término estructural (o estructura) no sólo aplica para las estructuras de la ingeniería civil, como los puentes y edificios, sino también en las estructuras navales, aeronáuticas, y mecánicas como las cáscaras de una nave, estructuras de aviones, housings (bastidor) de las máquinas, así como componentes mecánicos tales como pistones, partes de máquinas, y herramientas.

Los problemas de análisis estructural están gobernados por:

- Ecuaciones de equilibrio.
- Relaciones de compatibilidad, o relaciones deformaciones-desplazamientos.
- Características del material o relaciones tensiones-deformaciones.

Las estructuras construidas por elementos cuyas conexiones son discretas debido a la geometría de la misma, tales como las armaduras cuyas conexiones son articuladas y los pórticos cuyas conexiones son rígidas, presentan menor dificultad en el proceso de ensamblaje de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del sistema, que aquellas en que la subdivisión de los elementos es artificial en relación con la estructura real, tales como elementos con planchas y sólidos.

Para comprender los conceptos básicos que se han planteado se empleará un elemento estructural de barra (unidimensional), que solo tenga rigidez axial. Esto hará posible que dicho elemento sea sustituido por un resorte que posea igual rigidez en la dirección axial que el elemento de barra, con lo cual la rigidez del mismo quedará de inmediato definida por la constante elástica del resorte.

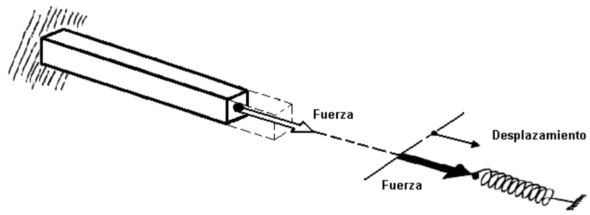


Figura 2. Elemento con Rigidez axial.

La gran tarea del Análisis Estructural es determinar la relación entre las cargas que actúan en todos los nodos de la estructura y los desplazamientos en cualquiera de ellos. Como se observa, en esta tarea está más presente el concepto de rigidez que el de resistencia.

El *análisis matricial de estructuras y en consecuencia el método de los elementos finitos* tiene como punto de partida la relación entre fuerzas nodales y desplazamientos nodales para cada elemento individual. Esta idea fundamental está relacionada con el concepto de rigidez. La mayoría de las personas posee la idea de *rigidez* desde las primeras aplicaciones de los elementos elásticos (resortes) de la física básica.

La constante elástica del resorte, que es la medida cuantitativa de la rigidez del mismo, se expresa por medio de la relación entre la fuerza aplicada y el desplazamiento medido en su extremo, como se ve en la Figura.3. La constante elástica del resorte puede ser entendida como un coeficiente de rigidez, pues es el coeficiente que relaciona la fuerza y el desplazamiento según la expresión $F = k\,d$. La situación más simple y de gran interés práctico corresponde al caso en que esa relación es lineal, en cuyo estudio se centrará la atención en este trabajo.

En este caso se tiene una estructura formada por un único resorte, por tanto elemento y estructura coinciden en el sentido geométrico y físico.

La relación *fuerza vs desplazamiento* en el ámbito de un elemento, se expresa por la Matriz de Rigidez del Elemento $[\,k\,]^e$, mientras que la relación *Fuerza vs Desplazamiento* en el ámbito de una estructura, se expresa por la Matriz de Rigidez de la Estructura. $[K]$.

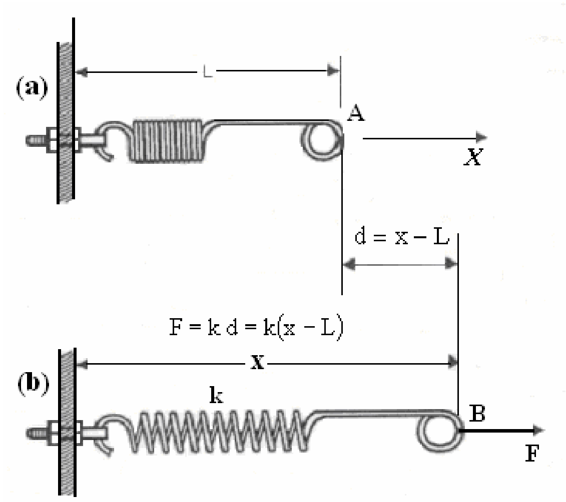


Figura 1.3 Rigidez del resorte representada por medio de su constante elástica.

Como en este caso la estructura es idéntica al elemento, la Rigidez de la Estructura es idéntica a la Rigidez del Elemento. Por ello puede escribirse:

$$F = K u$$

En que: $K = k$

Siendo k la constante elástica del resorte, que cuantifica la rigidez de la estructura.

Como ocurre normalmente para los resortes, solo un componente de fuerza se encuentra presente en esta estructura. Conociendo la Rigidez de la Estructura y conociendo la carga, la respuesta será un componente de desplazamiento.

$$u = \frac{F}{K} \quad [1.1]$$

Donde el valor de u se determina a partir de la inversión de K.

Se conoce que la rigidez del resorte se expresa por su constante elástica k. Supóngase que la Constante Elástica del mismo tiene un valor de 100 *kgf / mm*. Esto tiene el significado físico que implica que para obtener un desplazamiento de 1 *mm* se debe aplicar una fuerza de 100 *kgf. Por tanto al conocer la Rigidez de la Estructura, la relación* ***fuerza vs desplazamiento*** ya queda automáticamente definida.

Si se conoce el valor de la fuerza que se requiere para producir un desplazamiento unitario, se conocerá para cualquier valor de ella el desplazamiento que se produce, dentro del período lineal (elástico). Es entonces evidente que a partir del conocimiento de K se obtiene el desplazamiento u inmediatamente. Pero también se hace evidente que si se conoce el valor del desplazamiento u queda inmediatamente definido el valor de la fuerza F.

Así como la rigidez de un resorte se cuantifica por medio de la relación fuerza desplazamiento, midiendo en el punto de aplicación de la fuerza, en un elemento finito la idea es la misma pero con un carácter más amplio. Mientras en el resorte solo está presente el concepto de rigidez axial, pues solo transmite cargas axiales, en una viga están presentes diversos componentes de rigidez simultáneamente, tales como rigidez axial, rigidez a la flexión y rigidez a la torsión.

De esta forma los diversos componentes de rigidez de un elemento están relacionados con los diversos componentes de fuerza y desplazamientos presentes y que a semejanza del resorte, pueden ser cuantificados por medio de relaciones matemáticas que describen el comportamiento físico asociado a cada rigidez presente.

La representación matemática de la relación completa entre todas las fuerzas y desplazamientos nodales en un elemento se hará por medio de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, que se obtienen a partir del análisis físico del problema planteado. Los coeficientes de esas ecuaciones, que son los coeficientes de rigidez del elemento forman parte de la matriz de rigidez del elemento.

Las diversas clases de sistemas discretizados que involucran el ensamblaje con elementos finitos y como consecuencia la obtención de relaciones matemáticas que permitan la resolución del problema, tienen sus bases en algunas leyes fundamentales. A partir del conocimiento y aplicación de estas leyes se tendrá una herramienta para trabajar de forma general los problemas mencionados. Es importante identificar en cada caso de ensamblaje de elementos finitos, además del comportamiento físico que el elemento en estudio se propone simular, una técnica general que permita abordar el problema de ensamblaje de los elementos sin necesidad de recurrir en cada vez a la aplicación de estas leyes fundamentales.

La estructura en equilibrio debe satisfacer tres Leyes o Relaciones Fundamentales:

1. Ley de Equilibrio de Fuerzas.

Considerando las condiciones de equilibrio de la estructura se pueden aplicar las ecuaciones de equilibrio, conocidas del estudio de la mecánica, a cada uno de los elementos de forma aislada. De la misma forma la condición de equilibrio puede ser aplicada internamente a cada elemento. Si el elemento está en equilibrio, una parte de él también está en equilibrio.

2. Ley de Compatibilidad de los Desplazamientos.

El la Figura 4 se representa la idea general de la compatibilidad de los desplazamientos en una estructura. Los elementos 1, 2 y 3 conectados en el nodo **E** se mantienen conectados en el mismo nodo al pasar a la condición deformada en la posición **E´.** El desplazamiento de **E** hacia **E´** se representa por los componentes del desplazamiento u y v en las direcciones de los ejes x e y respectivamente.

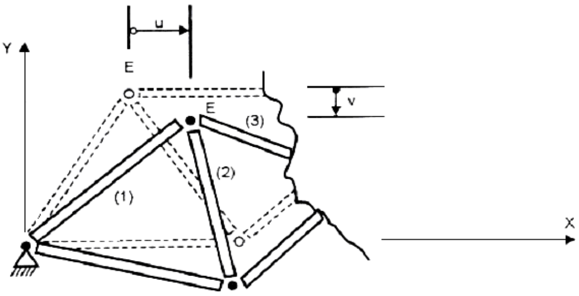


Figura 4. Condición de Compatibilidad de los Desplazamientos.

Los extremos de los tres elementos conectados en **E** están sujetos a los mismos componentes de desplazamiento. En caso contrario la estructura *se abre* en el punto **E**. Esta condición puede ser impuesta para todos los nodos de la estructura y se denomina *Condición de Compatibilidad de los Desplazamientos.*

3. Ley de Comportamiento del Material.

La Figura 5 representa un resorte bajo la acción de una fuerza externa F. El resorte se deforma y genera un esfuerzo hacia el interior del mismo, por intermedio de la fuerza interna **N**. En el análisis de equilibrio del elemento es interesante identificar la participación tanto de la fuerza externa como de la fuerza interna, pudiéndose justificar el equilibrio de un tramo del resorte (equilibrio elástico) por intermedio del diagrama de cuerpo libre, identificando la acción de un tramo del resorte sobre el otro, sustituyendo esa acción por la fuerza interna N.

Aunque se está centrando la atención en un simple elemento elástico que solo transmite fuerzas axiales y por tanto solo experimenta desplazamientos axiales, es interesante precisar algunas ideas que serán fundamentales al tratar los diversos elementos finitos por medio de un *Procedimiento Standard*. Una de ellas consiste en que la representación matemática de la situación de equilibrio debe respetar algunas reglas o convenciones ya adoptadas en el estudio de la Mecánica y la Resistencia de los Materiales.

La representación algebraica de la fuerza externa actuante en el elemento, por tanto la *Fuerza Nodal*, sigue la convención adoptada en la mecánica para el equilibrio de los cuerpos. Así cuando el sentido de la fuerza externa concuerda con el sentido de los ejes adoptados como referencia para el análisis del equilibrio esta tiene signo positivo, *en caso contrario, negativo.*

El hecho de estar hablando sobre elementos finitos no cambia el sentido físico del problema, ya que las leyes físicas se mantienen, por lo que el signo debe ser interpretado como todo signo de una representación física. El signo asociado a una fuerza externa aplicada a un elemento solo indica que el sentido de la fuerza aplicada concuerda o no con el sistema de referencia adoptado para el estudio del equilibrio.

Por otra parte, la fuerza interna que en última instancia transmitirá el concepto de Tensión, que se aplica en la mayoría de los análisis por elementos finitos, sigue la convención de la Resistencia de los Materiales, o sea, los esfuerzos de tracción son positivos y los de compresión son negativos.

Para pasar de la fuerza externa del elemento para la fuerza interna se deberán respetar siempre estas convenciones.

La Figura *5* presenta esa importante idea de forma simple. En particular el resorte muestra un comportamiento interno lineal. De esta manera**:**

$$\mathbf{N} = k\, d \qquad [1.2]$$

N - Es positivo, pues su efecto es de tracción.

$$f_2 = N \qquad [1.3]$$

Representa la relación matemática entre la Fuerza Interna y la Fuerza Externa, siendo f_2 positiva ya que es la fuerza externa en el mismo sentido del eje de referencia x y N es positiva, pues es la fuerza interna de tracción.

$$f_1 = -N \qquad [1.4]$$

f_1 Es negativa ya que es la fuerza externa que está en sentido contrario al eje de referencia x.

Las fuerzas externas e internas son iguales en intensidad, pero de sentidos opuestos. Así, para que la relación matemática exprese adecuadamente la relación entre fuerza externa e interna se introduce un signo negativo en esta última relación.

Matriz de Rigidez del Elemento.

Aplicando la idea explicada se representa en la Figura 6 el cuerpo libre de un resorte aislado.

Caso A. Se muestran las fuerzas y los desplazamientos para la condición de equilibrio. Ambas fuerzas han sido representadas arbitrariamente en el sentido positivo del eje de referencia y en consecuencia ambos desplazamientos también tienen sentido positivo. Por ello al establecer las ecuaciones de equilibrio se obtendrán las fuerzas y los desplazamientos en el sentido real de acción.

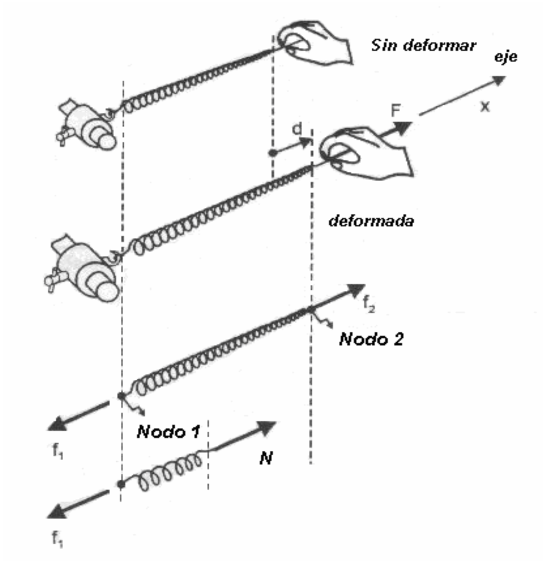


Figura 5. Fuerza externa aplicada en los nodos y fuerza interna.

Fuerzas Nodales.

$$\{f\}_{2\times1}=\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \qquad \textit{Matriz Columna de 2 x 1}$$

Desplazamientos Nodales

$$\{u\}_{2\times1}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad \textit{Matriz Columna de 2 x 1}$$

"La relación entre todas las fuerzas y desplazamientos referidos a un elemento finito se expresa por la Matriz de Rigidez del Elemento."

$$\{f\}_{2\,x1}=[k]^{e}_{i\,x\,j}\cdot\{u\}_{2\,x1} \qquad [1.5]$$

El resultado de esta operación tiene dimensión 2 x 1

Para poder efectuar la operación de multiplicación de matrices, la matriz que premultiplica (Matriz de Rigidez del elemento en análisis), debe tener un número de columnas igual al número de filas de la matriz que postmultimplica, que es la matriz desplazamiento, en este caso la matriz desplazamiento tiene dos (2) filas, por lo cual la matriz de rigidez tendrá necesariamente dos (2) columnas.

El resultado de la operación matemática de multiplicación de matrices tiene que tener dimensión (2 x 1) en la representación matricial, pues son dos fuerzas nodales las que están actuando en el elemento, por lo que el resultado es una *Matriz Columna de 2* x *1* (observe que $\{f\}_{2\,x1}$).

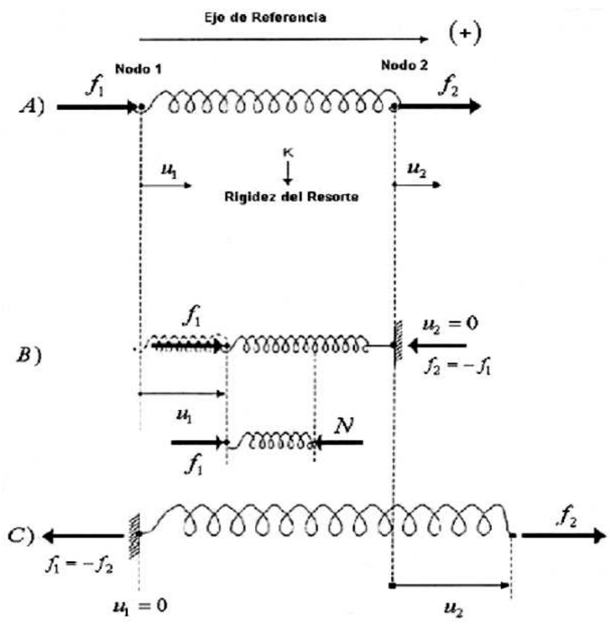


Figura 6. Diagrama de Cuerpo Libre de un Resorte.

Para poder obtener este resultado es necesario que la Matriz Rigidez tenga dos (2) filas. Todo esto conduce a que la Matriz Rigidez del elemento resorte para la solicitación de carga dada **tiene** que tener dimensión 2 x 2.

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_{2\times1}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}_{2\times2}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{2\times1} \qquad [1.6]$$

2·x·1¶

A partir de las consideraciones anteriores y teniendo en cuenta las propiedades del Álgebra Matricial y las Operaciones con Matrices se pueden hacer algunas conclusiones importantes**:**

1. El elemento resorte tiene dos componentes de desplazamiento posibles y como consecuencia su matriz de rigidez tiene dimensión 2 x 2.

2. Para un elemento finito cualquiera con n componentes de desplazamiento posible, su matriz de rigidez tendrá dimensión $n\ x\ n$.

Aunque las dos conclusiones anteriores son importantes para la representación matricial de los elementos finitos, interesa, tanto para este caso particular como para los otros tipos de elementos, responder dos aspectos fundamentales:

1. ¿Cuáles son los valores de los coeficientes que ocupan las diferentes posiciones en la Matriz de Rigidez identificada por la línea i y la columna j, es decir por cada elemento $k_{i,j}$?
2. Cual es el significado físico de ese coeficiente. Es decir: ¿Qué representa el coeficiente $k_{i,j}$ de la Matriz de Rigidez en términos del comportamiento físico que el elemento finito se propone simular?

Ya se vio que la rigidez del resorte cuantifica por medio de su constante elástica k, la fuerza necesaria para obtener un desplazamiento unitario. Esa idea es fundamental para entender y determinar los coeficientes de rigidez de la Matriz de Rigidez.

Para hacer más simple esta tarea se pueden determinar los términos individuales $k_{i,j}$ de la Matriz de Rigidez del elemento considerando cada desplazamiento nodal por separado, manteniendo nulo el otro desplazamiento y utilizando la ley del material para determinar como la acción impuesta a un nodo se transmite por el interior del elemento hasta el otro nodo.

Si se pudiese aplicar un desplazamiento unitario en uno de los nodos del resorte y entonces medir las fuerzas asociadas a ese desplazamiento unitario, se podrían determinar los coeficientes de la matriz de rigidez. Para hacer más simple esa tarea, se podrían determinar los términos individuales $k_{i,j}$ de la Matriz de Rigidez del Elemento considerando cada desplazamiento nodal por separado y manteniendo nulo el otro desplazamiento, además de hacer empleo de la *ley de comportamiento del material*, para determinar como la acción impuesta a un nodo se transmite por el interior del elemento hasta el otro nodo.

Caso B.

Condición de equilibrio**:** $f_2 = -f_1$

Las fuerzas nodales actúan en sentidos opuestos.

Fuerza Interna**:** $(\mathbf{N} = k\,d)$

d Representa la deformación del resorte.

Para poder aplicarlo a los casos más generales se definirá la deformación del resorte considerando los desplazamientos en los nodos u_1 y u_2. Esto se hace necesario ya que en los casos en que ambos nodos se muevan bajo la acción de las cargas, el resorte puede no deformarse si ocurre la condición en la cual $u_1 = u_2$, presentándose el fenómeno de **Movimiento de Cuerpo Rígido,** adecuadamente definido en la Teoría de la Elasticidad. Por ende habrá deformación siempre que:

$d \neq 0$ Siendo: $d = u_2 - u_1$ [1.7]

Para el Caso B que se analiza se tiene que**:**

$u_2 = 0 \qquad \therefore d = -u_1$

Entonces: $N = k\,d = -k\,u_1$

Como u_1 es positivo, pues tiene la misma orientación que el eje de referencia, *la fuerza interna es negativa,* lo que corresponde a una situación de compresión del resorte $(N < 0)$.

Desde el punto de vista físico la fuerza aplicada en el extremo del resorte, por el nodo 1, realiza un efecto sobre el nodo 2 y para ello se transmite internamente por el resorte. Un tramo del elemento (que considere el efecto de la acción en el nodo 1 sobre el nodo 2) también tiene que estar en equilibrio. Para que esto ocurra la fuerza f_1 debe ser equilibrada por la fuerza interna N, así que sus signos son opuestos, según la convención de signos establecida. Matemáticamente la transmisión de la fuerza externa a la fuerza interna tiene que respetar dichas convenciones.

Por tanto: $N = -f_1$

Como: $N = k\,d = -k\,u_1$

Entonces sustituyendo el valor de N:

$$-k\,u_1 = -f_1$$

$$f_1 = k\,u_1$$

Como: $f_2 = -f_1$

Entonces:

$$f_2 = -k\,u_1$$

Estas relaciones entre las fuerzas y los desplazamientos pueden expresarse de forma matricial.

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 = 0 \end{Bmatrix} \qquad [1.8]$$

Efectuando el producto acorde con los procedimientos del álgebra matricial y sustituyendo los valores de f_1 y f_2:

$$f_1 = k_{11}u_1 + k_{12} \cdot 0 \qquad [1.9]$$
$$f_2 = k_{21}u_1 + k_{22} \cdot 0$$
$$k\,u_1 = k_{11}u_1$$
$$-k\,u_1 = k_{21}u_1$$
$$k_{11} = k$$
$$k_{21} = -k$$

Por tanto; dos de los coeficientes de la Matriz de Rigidez del resorte ya están determinados. Empleando el mismo procedimiento se pueden determinar los otros dos coeficientes y de inmediato pasar a la comprensión de su significado físico.

Caso C.

Condición de equilibrio. $f_1 = -f_2$. Las fuerzas nodales están en sentidos opuestos.

Fuerza Interna: en este caso se tiene que:

$d \neq 0$ Siendo: $d = u_2 - u_1$

Parea este caso se tiene

$u_1 = 0 \qquad \therefore d = u_2$

Entonces $\Longrightarrow \quad N = k\,d = k\,u_2$

Como u_2 es positivo entonces la fuerza interna será positiva, lo que se corresponde con una condición de tracción del resorte $(N > 0)$.

Desde el punto de vista físico la fuerza aplicada en el extremo del resorte, por el nodo 2, realiza un efecto sobre el nodo 1 y para ello se transmite internamente por el resorte. Si todo el elemento está en equilibrio, un tramo del mismo (que considere el efecto de la acción en el nodo 2 sobre el nodo 1) también tiene que estar en equilibrio. Para que esto ocurra la fuerza f_2 debe ser equilibrada por la fuerza interna N, así que sus signos son iguales, según la convención de signos establecida. Matemáticamente la transmisión de la fuerza externa a la fuerza interna tiene que respetar dichas convenciones.

$f_2 = N$

Como: $N = k\,u_2$

Entonces: $f_2 = k\,u_2$ y como: $f_1 = -f_2$

Se tendrá:

$$f_1 = -k\,u_2$$
$$f_2 = k\,u_2$$

Estas relaciones entre las fuerzas y los desplazamientos pueden igualmente expresarse de forma matricial.

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad [1.10]$$

Efectuando el producto acorde con los procedimientos del álgebra matricial y sustituyendo los valores de f_1 y f_2:

$$f_1 = k_{11} \cdot 0 + k_{12} \cdot u_2 \qquad [1.11]$$
$$f_2 = k_{21} \cdot 0 + k_{22} \cdot u_2$$

$$-k\,u_2 = k_{12} u_2$$
$$k\,u_2 = k_{22} u_2$$
$$k_{12} = -k$$
$$k_{22} = k$$

Ahora quedan determinados los cuatro coeficientes de la matriz de rigidez del elemento, definiendo completamente la relación entre las cargas nodales y los desplazamientos nodales por medio de la matriz de rigidez del elemento.

$$[k]^e = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \qquad [1.12]$$

Matriz de rigidez de elemento.

Significado físico de los términos de la Matriz de Rigidez.

Según la ecuación [1.9]

$f_1 = k_{11} u_1 + k_{12} \cdot 0 \quad \Longrightarrow \quad f_1 = k_{11}\,u_1$

$f_2 = k_{21} u_1 + k_{22} \cdot 0 \quad \Longrightarrow \quad f_2 = k_{21}\,u_1$:

Considerando que se produce un desplazamiento unitario se hace:

$u_1 = 1$

Se obtiene: $f_1 = k_{11}$

$f_2 = k_{21}$

Según la ecuación [1.11]

$f_1 = k_{11} \cdot 0 + k_{12} \cdot u_2 \Longrightarrow \quad f_1 = k_{12}\,u_2$

$f_2 = k_{21} \cdot 0 + k_{22} \cdot u_2 \Longrightarrow \quad f_2 = k_{22}\,u_2$

Considerando que se produce un desplazamiento unitario se hace:

$u_2 = 1$ Se obtiene:

$f_1 = k_{12}$

$f_2 = k_{22}$

Note que los coeficientes $k_{i,j}$ de la Matriz de rigidez del elemento representan fuerzas asociadas a un desplazamiento unitario impuesto en un nodo, manteniendo el otro fijo, es decir con desplazamiento nulo.

Puede entonces decirse que:

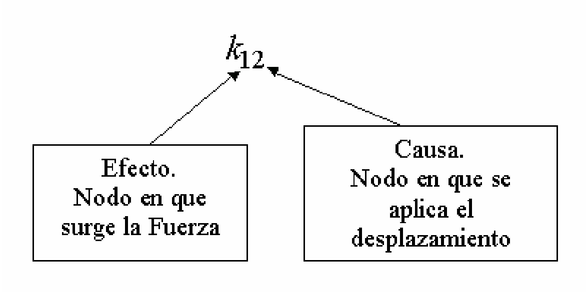
K_{21} -Es la fuerza en el nodo 2 debido a un desplazamiento unitario en el nodo 1, manteniendo el nodo 2 fijo.

K_{11} -Es la fuerza en el nodo 1 debido a un desplazamiento unitario en el nodo 1, manteniendo el nodo 2 fijo.

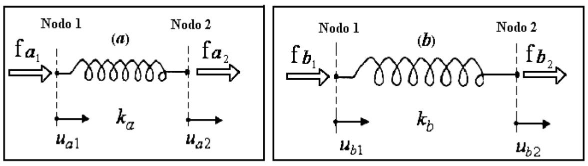
K_{12} -Es la fuerza en el nodo 1 debido a un desplazamiento unitario en el nodo 2, manteniendo el nodo 1 fijo.

K_{22} -Es la fuerza en el nodo 2 debido a un desplazamiento unitario en el nodo 2, manteniendo el nodo 1 fijo.

Por tanto los términos de la Matriz de Rigidez del elemento representan *Relaciones de Causa Efecto*. A causa de un desplazamiento unitario impuesto en un nodo, el efecto es: las fuerzas que surgen en los nodos del elemento debido a ese desplazamiento. Los subíndices de los coeficientes de la Matriz tienen implícitos la relación Causa Efecto.



La Matriz de Rigidez del elemento tiene el mismo significado físico, composición y orden para cualquier tipo de elemento finito que se desarrolle, solo los valores de sus coeficientes serán diferentes según sea la rigidez del mismo, como se muestra en la Figura 7.



$$\begin{Bmatrix} f_{a1} \\ f_{a2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{a1} \\ u_{a2} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} f_{b1} \\ f_{b2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_b & -k_b \\ -k_b & k_b \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{b1} \\ u_{b2} \end{Bmatrix}$$

Figura 7. Relación fuerza desplazamiento expresada en forma matricial para dos elementos resortes con diferente valor de su constante de rigidez.

Matriz de Rigidez de un Elemento de Barra de Armadura.

De la misma forma que se ha obtenido la Matriz de Rigidez para el elemento resorte se podrá determinar la de un elemento de barra que sólo posea rigidez axial. Esta definición para el elemento conduce a la condición de que el elemento solo tiene dos grados de libertad (uno por nodo que son GL 1 y GL 2), a lo largo de cuyas direcciones se definen las direcciones de las fuerzas y los desplazamientos, como se muestra en la Figura 8.

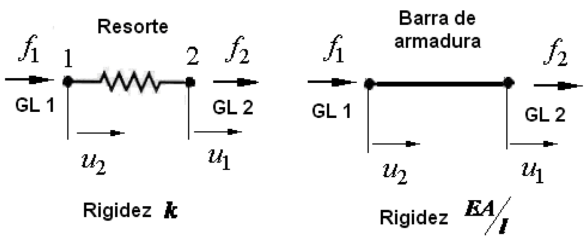


Figura 8. Comparación entre el elemento resorte y el elemento de barra de armadura con solo rigidez axial.

Los ensayos realizados en probetas demuestran que al estirar una barra su longitud aumenta, Figura 1 y que las dimensiones transversales disminuyen. Este fenómeno tiene lugar según la Ley de Hooke, siguiendo la expresión matemática deducida desde los tiempos de Cauchy (1789-1857).

$$\sigma = E\,\varepsilon \qquad\qquad \varepsilon = \Delta l/l$$

$$\sigma = F/A$$

Como bien se conoce, vinculando estas tres relaciones se obtiene la ecuación para determinar el alargamiento absoluto de la barra.

$$\Delta l = d = u_2 - u_1 = \frac{Fl}{EA} \qquad [1.13]$$

De donde: $F = \dfrac{EA}{l} d$

Esta expresión es idéntica a la obtenida en el caso del resorte, $F = k\,d$ puede entonces inferirse que el término EA/l corresponde a la rigidez de la barra que solo posee rigidez axial.

Relación entre las fuerzas nodales y los desplazamientos nodales.	
Barra.	Resorte.
$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$
$\{f\} = [k]^e \{u\}$	$\{f\} = [k]^e \{u\}$

Observe que el elemento de barra de armadura tiene dos grados de libertad, al igual que el elemento resorte, por lo cual su Matriz de Rigidez es de (2 x 2). El significado físico de la misma, así como el de sus coeficientes sigue siendo el mismo, solo son diferentes los valores de los coeficientes de la matriz.

Generalización a partir del resorte del significado físico de la Matriz de Rigidez de cualquier Elemento Finito.

Los términos de la Matriz de Rigidez del elemento representan fuerzas asociadas a desplazamientos unitarios; por tanto, al conocer la matriz de rigidez del elemento, la relación fuerza – desplazamiento ya queda previamente definida para el elemento entero en término de desplazamientos unitarios.

Si se conoce el valor de la fuerza asociada a un desplazamiento unitario, se sabrá para cualquier valor de desplazamiento, dentro del período elástico, el valor de la fuerza. Además de esto, si los desplazamientos actuaran simultáneamente, los efectos de cada uno de los desplazamientos aplicados aisladamente serán superpuestos y se tendrá la fuerza actuante en cada nodo, consecuentemente con la acción conjunta de todos los desplazamientos en el elemento.

Esta idea establecida a partir del resorte puede ser generalizada para los diversos elementos finitos. En particular ya se vio que ese elemento presenta sólo un componente de desplazamiento por nodo. En los elementos en general esa relación puede ser más amplia.

Dígase que una viga en el espacio tiene asociados seis grados de libertad por nodo y por tanto admite hasta seis componentes de desplazamiento en un mismo nodo, tres traslaciones y tres rotaciones y por ende hasta seis componentes de carga en un mismo nodo, tres fuerzas y tres momentos. El concepto de desplazamiento nodal en este caso es más amplio. Por ello es más adecuado identificar los diversos componentes de los desplazamientos asociados a los nodos como el componente de desplazamiento en una dirección determinada definida por el sistema de coordenadas (x,y,z). Estas componentes son llamadas *Grados de Libertad del Elemento***.** La Figura 9 representa un elemento de viga en el espacio y los posibles grados de libertad. El concepto de coeficiente de rigidez continúa siendo el mismo; sin embargo, relacionando ahora las fuerzas con los diversos grados de libertad se puede generalizar este**:**

$k_{3,9}$: Término localizado en la línea 3 columna 9 de la matriz de rigidez de la viga. Representa la fuerza en la dirección del grado de libertad 3 debido al desplazamiento unitario en la dirección del grado de libertad 9. Observe que el único que se desplaza es el grado de libertad 9 y los, restantes se mantienen bloqueados.

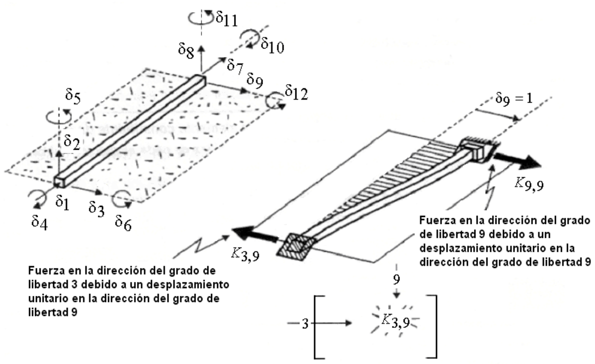


Figura 9. Posibles grados de libertad de un elemento de viga en el espacio .

Los coeficientes $k_{3,j}$ que ocupan la fila 3 representan las fuerzas que surgen en la dirección del Grado de Libertad 3 debido a los desplazamientos unitarios δ en la dirección de los Grados de Libertad j.

El siguiente problema a resolver consiste en ensamblar la matriz de rigidez de la estructura a partir de la matriz de rigidez de los elementos que la forman, según la posición de los mismos en la estructura ensamblada. Pero este no es el propósito de este artículo, sino solo mostrar algunos elementos fundamentales sin los cuales no es posible comenzar a andar el camino de la teoría de los elementos finitos.

Conclusiones.

- La formulación de un elemento para representar una determinada situación física no es necesariamente matricial. Solo que el modelo matemático que contiene el conjunto de las variables, (fuerzas, desplazamientos, etc.) considerados para un elemento en la condición de equilibrio, puede ser representado de forma matricial, debido a la tremenda facilidad que brindan las matrices para el almacenamiento y manipulación de las variables y ecuaciones de forma simple y compacta en la computadora, logrando una adecuada eficiencia en la manipulación simultánea del conjunto de ecuaciones con muchas variables, algunas de ellas independientes entre sí.
- Aunque los elementos están definidos por sus nodos, lo más importante no es cuantos nodos tiene el elemento sino la cantidad de grados de libertad por nodo que tiene dicho elemento.
- El concepto de desplazamiento nodal es muy amplio, por lo que es más adecuado identificar los diversos componentes de los desplazamientos asociados a los nodos como el componente de desplazamiento en una dirección determinada, definida en el sistema de coordenadas (x, y, z) y relacionado con el grado de libertad en esa dirección.
- La matriz de rigidez de cualquier elemento finito es cuadrada y simétrica y su orden se corresponde con la cantidad de grados de libertad que tiene el elemento que pretende simular una determinada condición física.
- Al definir la matriz de rigidez de un elemento queda automáticamente definida la relación *fuerza vs desplazamiento.*
- Los coeficientes de la matriz de rigidez del elemento representan físicamente fuerzas asociadas a un desplazamiento unitario impuesto en un nodo, manteniendo los restantes nodos fijos, es decir con desplazamiento nulo.
- Por tanto, los términos de la matriz de rigidez del elemento ($k_{i,j}$) representan relaciones de causa efecto. A causa de un desplazamiento unitario impuesto en la dirección de un grado de libertad en un nodo (j), el efecto se corresponde con la fuerza que surge en la dirección de otro grado de libertad (i), manteniendo los restantes grados de libertad fijos.
- La matriz de rigidez así definida caracterizará siempre al elemento que se ha simulado, en este caso un resorte.

Bibliografía.

1. Chandrupatla, T. R. and Belegundu, A. D., *Introduction to Finite Elements in Engineering*. Editorial Prentice Hall. México. 2001
2. Connor J J., Brebbia C.A. *Finite Element Techniques for Fluid Flow*. Newnes-Butterworths, London-Boston. 1977.
3. Meyer, *Concepts of mathematical modelling.* 1985.
4. Shames I. H. *Mechanics of Deformable solids*. Editorial Prentice - Hall, E.U.A. 1964.
5. Timoshenko, S.P and Goodier, J.N., *"Teoría de la Elasticidad"*. Editorial Mir. Moscú, 1964.
6. Tirupathi R. Chandrupatla & Ashok D. Belegundu. *Introducción al Estudio del Elemento Finito en Ingeniería.* Editorial Prentice Hall. México. 1999.
7. Zienkiewicz, O. C. & Taylor R. L. *El Método de los Elementos Finitos.* Editorial McGraw-Hill. Año 1993.
8. Zienkiewicz, O. C. & Morgan K. *Finite Elements and Approximation*. John Wiley & Sons. New York. 1983.

Learning on the Method of the Finite Elements.

Abstract.

The Finite Element Method has showed the wide possibilities that it possesses as tool for the solution of engineering problems and research problems. As a result of it their employment has a great diffusion in the community of engineers, so much in study centers as in research centers and factories. If, this is in this way, then: Which is the reason for which the engineers has a dependence so high of the professionals software, even when the costs of acquisition of these is very high and the research centers or the universities don't dedicate time and efforts to the development of these?

According to the author's point of view the reality is that the abilities in the use of software can be acquired by most of the professionals in the matter, but the theory on the method it is even not very understood by the most, even when they have learned how to use one of this professional software. Which is the cause? Most has not reached the understanding of the physical problem and much less can to separate the mathematical tool that is used for their instrumentation not confusing it with the physical problem. The rezone of this is in first instance that the texts published don't leave clear both aspects and in second place because in order to do this work is required a multidisciplinary group with almost exclusive dedication for this task.

In this article the fundamental physical problem related with the topic will be presented, with a proposition on the necessary order to transmit the physical problem, separating it of the mathematical tool, in such a way that you can be understood each one of them in separate.

Key words: Finite elements, freedom degrees.