

Razón de contacto en los engranajes cilíndricos rectos con socavado.

E. Mirabet Lemos *, L. Martínez Delgado **.

* Especialista en Mto de la empresa Argelio Reyes (PRODAL)

**Facultad de Ingeniería Mecánica, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (ISPJAE).

E-mail: luiscriscris@yahoo.com.mx, lmartinez@mecanica.cujae.edu.cu

(Recibido el 14 de Noviembre de 2003, aceptado 11 de Febrero de 2004).

Resumen.

En el presente trabajo se muestra el desarrollo y la aplicación de una serie de expresiones que permiten evaluar la razón de contacto en transmisiones por engranajes donde el piñón y la rueda o el piñón solo poseen socavado. Además se muestra el procedimiento para la aplicación de dichas expresiones, mediante la solución de cuatro problemas.

Palabras claves: Socavado, trocoide, evolvente, engranajes, razón de contacto.

1. Introducción.

El perfil de los dientes de los engranajes de evolvente esta compuesto por dos curvas fundamentales, una es una evolvente y la otra es una trocoide [1]. En los engranajes, estas curvas pueden ser tangentes o cortarse entre si. La porción de evolvente conforma el perfil de trabajo y la trocoide el de transición entre la evolvente y la raíz del diente. Cuando ambas curvas son tangentes se tiene un diente sin socavado y cuando se cortan se dice que el diente está socavado, (ver Figura. 1).

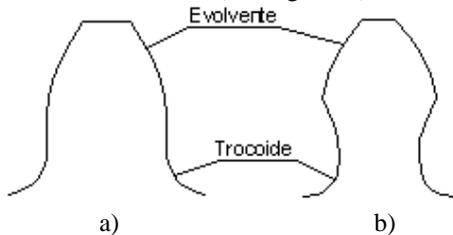


Fig. 1. a) Diente sin socavado, b) Diente con socavado.

El socavado en los dientes esta motivado por la interferencia de la herramienta generadora durante la elaboración del engrane. Esta interferencia socava o elimina la parte inferior del perfil de evolvente. El socavado tiene los siguientes aspectos negativos:

- Reduce la longitud del perfil de evolvente, disminuyendo la razón de contacto.

- Reduce la sección crítica para los esfuerzos de flexión.

La interferencia de maquinado o socavado en la base del diente depende de varios factores como son:

- Tipo y parámetros de la herramienta de elaboración.

- Número de dientes del engrane que se elabora.

- del coeficiente de corrección del mismo.

2- Socavado generado por herramientas tipo fresa madre o tipo cremallera.

El perfil de estas herramientas esta compuesto de varias partes, cuyas dimensiones se ajustan a perfiles de cremalleras básicas normalizadas (ver Figura 2).

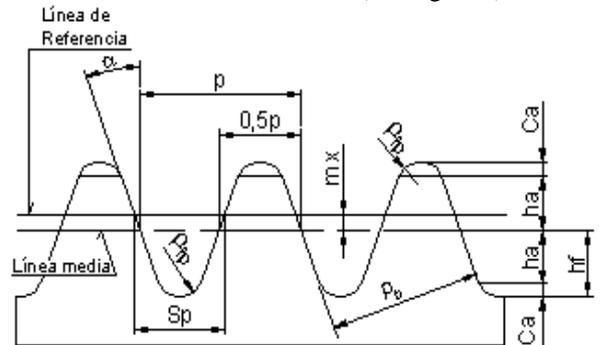


Fig. 2 Parámetros de una cremallera básica.

En la cremallera básica mostrada en la Figura 2, se cumplen las siguientes relaciones a partir de su módulo m , ángulo de presión α , coeficiente de corrección x y los coeficientes h_a^* y c_a^* de la herramienta.

$$p = m \cdot \pi \quad \text{Paso normal}$$

$$p_b = p \cdot \cos \alpha \quad \text{Paso base}$$

$$h_a = h_a^* \cdot m \quad \text{Altura de cabeza}$$

$$c_a = c_a^* \cdot m \quad \text{Holgura radial}$$

$$h_f = (h_a^* + c_a^*) \cdot m \quad \text{Altura del pie}$$

$$\rho_{fp} = \left(\frac{c_a^*}{1 - \sin \alpha} \right) \cdot m \quad \text{Radio de transición.}$$

$$S_p = \frac{m \cdot \pi}{2} + 2 \cdot m \cdot x \cdot \tan \alpha - \text{espesor interdental,}$$

sobre la línea de referencia.

Durante el tallado de un engrane se produce el engranaje entre los dientes de este y los dientes de la herramienta generadora. Durante este engranaje de maquinado, al igual que durante el proceso de engranaje de dos ruedas dentadas, se produce un movimiento relativo de rodadura entre la herramienta y el engranaje que se elabora. Los elementos en rodadura son la línea de referencia de la cremallera y la circunferencia de referencia del engrane, (ver Figura 3).

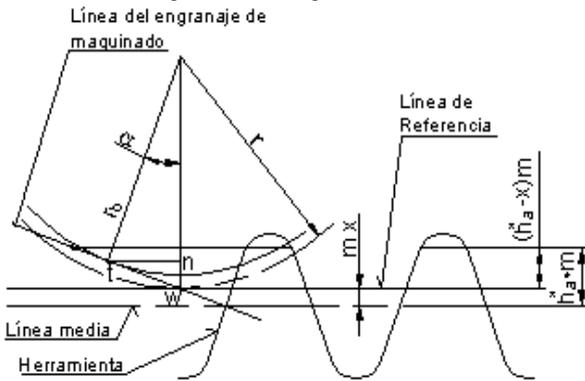


Fig. 3. Engranaje de maquinado.

En la Figura 3 se muestra la disposición relativa de la herramienta y el engrane, durante el proceso de generación de los dientes. Haciendo uso de la misma, se puede determinar la expresión que evalúa la existencia o no del socavado en los dientes.

La existencia o no de socavado en el dentado de un engrane puede analizarse mediante la Figura 3.

$$r = \frac{m \cdot z}{2}$$

$$r_b = r \cdot \cos \alpha$$

$$r - r_b \cos \alpha \geq (h_a^* - x) \cdot m$$

$$r - r \cos^2 \alpha \geq (h_a^* - x) \cdot m$$

$$\frac{m \cdot z}{2} \cdot \sin^2 \alpha \geq (h_a^* - x) \cdot m$$

$$z \geq \frac{2 \cdot (h_a^* - x) \cdot m}{\sin^2 \alpha} \tag{1}$$

Para $x=0$ definiremos el valor de:

$$z_{\min} = \frac{2 \cdot h_a^*}{\sin^2 \alpha} \tag{2}$$

De la formula (1) se deduce que:

$$x \geq h_a^* - \frac{z \cdot \sin^2 \alpha}{2} \quad \text{Donde:}$$

$$x_{\min} \geq \frac{h_a^* \cdot (z_{\min} - z)}{z_{\min}} \tag{3}$$

La expresión (3), es la condición necesaria y suficiente para evitar el socavado en una transmisión por engranajes cilíndricos rectos.

Según la cremallera que se emplee, z_{\min} tomará valores diferentes, por ejemplo:

Para $\alpha = 20^\circ$ y $h_a^* = 1$ se tiene que: $z_{\min} = 17$ y además $x_{\min} = \frac{(17 - z)}{17}$. De forma semejante se

pueden obtener los valores de z_{\min} y x_{\min} en función de los parámetros de la herramienta empleada.

Si $x_{\min} < 0$ significa que este es el valor máximo de corrección negativa que se puede realizar sin que exista socavado.

3- Razón de contacto.

De la Figura 4 puede apreciarse como, debido a la existencia del socavado de una transmisión por engranajes, la línea práctica de engranaje se reduce de $a_1 a_2$ a $s_1 s_2$.

En estas condiciones la razón de contacto queda expresada de la forma siguiente:

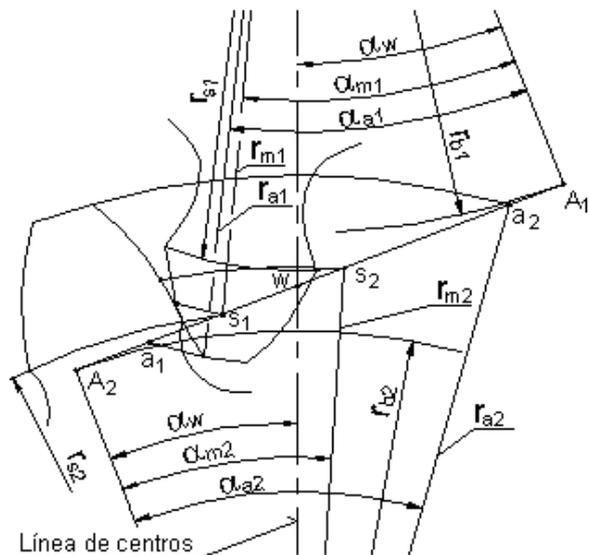


Fig. 4. Zona de contacto $S_1 S_2$ para dientes con socavado.

$$\epsilon = \frac{\overline{S_1 S_2}}{p_b} \tag{4}$$

Conociendo los radios límites de socavado para ambas ruedas, r_{s1} y r_{s2} , se puede obtener el segmento $\overline{S_1S_2}$, muy aproximadamente, de la siguiente forma:

$$r_{s1,2} = \sqrt{r_{b1,2}^2 + \left(r_{b1,2} - \frac{r_{f1,2}}{\cos \alpha}\right)^2} \quad (5)$$

Conociendo que el ángulo de engranaje α_w viene dado por:

$$\alpha_w = \arcsin\left(\operatorname{inv} \alpha + 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \tan \alpha\right)$$

También $\alpha_w = \cos^{-1}\left(\frac{a}{a_w} \cdot \cos \alpha\right)$. Cada expresión se elegirá según los datos.

Ahora se pueden plantear según Figura 4 que la longitud de la línea teórica de engranaje, viene dada por:

$$\overline{A_1A_2} = a_w \cdot \sin \alpha_w \quad (6)$$

además

$$\overline{A_1S_1} = \overline{A_1A_2} - \sqrt{r_{s2}^2 - r_{b2}^2} \quad (7)$$

$$\overline{A_2S_2} = \overline{A_1A_2} - \sqrt{r_{s1}^2 - r_{b1}^2} \quad (8)$$

$$\alpha_{m1} = \tan^{-1}\left(\frac{\overline{A_1S_1}}{r_{b1}}\right) \quad (9)$$

$$\alpha_{m2} = \tan^{-1}\left(\frac{\overline{A_2S_2}}{r_{b2}}\right) \quad (10)$$

$$\overline{S_1S_2} = \overline{S_1W} + \overline{S_2W} \text{ donde:} \quad (11)$$

$$\overline{S_1W} = r_{b1}(\tan \alpha_{m1} - \tan \alpha_w) \quad (12)$$

$$\overline{S_2W} = r_{b2}(\tan \alpha_{m2} - \tan \alpha_w) \quad (13)$$

Sustituyendo (12) y (13) en (11):

$$\overline{S_1S_2} = r_{b1}(\tan \alpha_{m1} - \tan \alpha_w) + r_{b2}(\tan \alpha_{m2} - \tan \alpha_w) \quad (14)$$

Sustituyendo (14) en (4), se obtiene:

$$\varepsilon = \frac{r_{b1}(\tan \alpha_{m1} - \tan \alpha_w) + r_{b2}(\tan \alpha_{m2} - \tan \alpha_w)}{P_b}$$

Simplificando la expresión anterior:

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \cdot [z_1(\tan \alpha_{m1} - \tan \alpha_w) + z_2(\tan \alpha_{m2} - \tan \alpha_w)]$$

La razón de contacto es un parámetro que permite evaluar si se garantiza o no el contacto continuo entre

los pares de dientes. En teoría este contacto se garantiza si $\varepsilon \geq 1$, no obstante en la práctica se recomienda, teniendo en cuenta aspectos de precisión y resistencia, que $\varepsilon = 1,05 \div 1,35$ [2]. Luego un valor práctico promedio puede tomarse como: $\varepsilon \geq 1,2$ [3, 4].

Los radios r_{m1} y r_{m2} , que definen la longitud de la línea práctica de engranaje $\overline{S_1S_2}$, pueden ser expresados en función de α_{m1} ; α_{m2} y los radios bases respectivos.

Para todas las ruedas con socavado es válida la expresión (5) y para las ruedas sin socavado puede plantearse que:

$$r_{s1,2} = \sqrt{\overline{A_{1,2}a_{2,1}}^2 + r_{b1,2}^2} \quad (16)$$

Donde

$$\overline{A_{1,2}a_{2,1}} = \overline{A_1A_2} - \sqrt{r_{a2,1}^2 + r_{b2,1}^2} \quad (17)$$

En (17) $r_{a2,1}$ representan los radios exteriores de la rueda y el piñón, respectivamente.

Para la situación expresada en (16) el punto S_1 se desplaza hasta el punto a_1 , (ver Figura 4), lo que implica que $\alpha_{m1} = \alpha_{a1}$, o sea, igual al ángulo del perfil de evolvente en el radio exterior.

4- Ejemplos de aplicación.

1.-Determinar la razón de contacto para una transmisión con engranajes cilíndricos rectos con los siguientes datos: $m = 5$; $\alpha = 20^\circ$; $h_a^* = 1$;

$$C_a^* = 0,25; z_1 = 8; z_2 = 14; x_1 = x_2 = 0$$

Solución:

$$\alpha_w = \alpha = 20^\circ, \text{ ya que } x_{\Sigma} = x_1 + x_2 = 0$$

$$a_w = m \cdot (z_1 + z_2) / 2 = 55 \text{ mm}$$

$$r_{b1} = \frac{m \cdot z_1}{2} \cdot \cos \alpha = 18,793852 \text{ mm}$$

$$r_{b2} = \frac{m \cdot z_2}{2} \cdot \cos \alpha = 32,889242 \text{ mm}$$

$$r_1 = \frac{m \cdot z_1}{2} = 20 \text{ mm}$$

$$r_2 = \frac{m \cdot z_2}{2} = 35 \text{ mm}$$

$$r_{f1} = r_1 - m \cdot (h_a^* + C_a^* - x_1) = 13,75 \text{ mm}$$

$$r_{f2} = r_2 - m \cdot (h_a^* + C_a^* - x_2) = 28,75 \text{ mm}$$

$$r_{s1} = \sqrt{r_{b1}^2 + \left(r_{b1} - \frac{r_{f1}}{\cos \alpha}\right)^2} = 19,249057 \text{ mm}$$

$$r_{s2} = \sqrt{r_{b2}^2 + \left(r_{b2} - \frac{r_{f2}}{\cos \alpha}\right)^2} = 32,969156 \text{ mm}$$

$$\overline{A_1 A_2} = a_w \cdot \sin \alpha_w = 18,811108 \text{ mm}$$

$$\overline{A_1 S_1} = \overline{A_1 A_2} - \sqrt{r_{s2}^2 - r_{b2}^2} = 16,516983 \text{ mm}$$

$$\overline{A_2 S_2} = \overline{A_1 A_2} - \sqrt{r_{s1}^2 - r_{b1}^2} = 14,649699 \text{ mm}$$

$$\alpha_{m1} = \tan^{-1} \left(\frac{\overline{A_1 S_1}}{r_{b1}} \right) = 41,310633^\circ$$

$$\alpha_{m2} = \tan^{-1} \left(\frac{\overline{A_2 S_2}}{r_{b2}} \right) = 24,009399^\circ$$

Sustituyendo valores en (15) se obtiene definitivamente:

$$\varepsilon = \frac{z_1(\tan \alpha_{m1} - \tan \alpha_w) + z_2(\tan \alpha_{m2} - \tan \alpha_w)}{2\pi} = 0,8$$

Como puede apreciarse para la transmisión analizada $\varepsilon < 1$. Esto significa que no existe un contacto continuo entre las parejas de dientes.

2.- Analizando el ejemplo anterior pero cambiando sus coeficientes de corrección: $m = 5$, $\alpha = 20^\circ$; $h_a^* = 1$; $C_a^* = 0,25$; $z_1 = 8$; $z_2 = 14$; $x_1 = 0,4$; $x_2 = 0,1$.

Las correcciones en ambos engranes han sido dadas de forma tal que tanto x_1 como x_2 son menores que los x_{\min} respectivos, garantizándose que ambas ruedas tengan socavado.

Solución:

$$\text{inv} \alpha_w = \text{inv} \alpha + 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \tan \alpha = 0,0314484$$

$$\alpha_w = \text{arcinv}(\alpha_w) = 25,38148^\circ$$

$$a_w = \frac{m \cdot (z_1 + z_2)}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} = 57,205 \text{ mm}$$

$$\alpha_w = \alpha = 20^\circ$$

$$r_{b1} = \frac{m \cdot z_1}{2} \cdot \cos \alpha = 18,793852 \text{ mm}$$

$$r_{b2} = \frac{m \cdot z_2}{2} \cdot \cos \alpha = 32,889242 \text{ mm}$$

$$r_1 = \frac{m \cdot z_1}{2} = 20 \text{ mm}$$

$$r_2 = \frac{m \cdot z_2}{2} = 35 \text{ mm}$$

$$r_{f1} = r_1 - m \cdot (h_a^* + C_a^* - x_1) = 15,75 \text{ mm}$$

$$r_{f2} = r_2 - m \cdot (h_a^* + C_a^* - x_2) = 29,25 \text{ mm}$$

$$r_{s1} = \sqrt{r_{b1}^2 + \left(r_{b1} - \frac{r_{f1}}{\cos \alpha}\right)^2} = 18,903496 \text{ mm}$$

$$r_{s2} = \sqrt{r_{b2}^2 + \left(r_{b2} - \frac{r_{f2}}{\cos \alpha}\right)^2} = 32,936409 \text{ mm}$$

$$\overline{A_1 A_2} = a_w \cdot \sin \alpha_w = 24,52053 \text{ mm}$$

$$\overline{A_1 S_1} = \overline{A_1 A_2} - \sqrt{r_{s2}^2 - r_{b2}^2} = 22,758486 \text{ mm}$$

$$\overline{A_2 S_2} = \overline{A_1 A_2} - \sqrt{r_{s1}^2 - r_{b1}^2} = 22,487481 \text{ mm}$$

$$\alpha_{m1} = \tan^{-1} \left(\frac{\overline{A_1 S_1}}{r_{b1}} \right) = 50,450726^\circ$$

$$\alpha_{m2} = \tan^{-1} \left(\frac{\overline{A_2 S_2}}{r_{b2}} \right) = 34,362120^\circ$$

Sustituyendo valores en (15) se obtiene finalmente:

$$\varepsilon = \frac{z_1(\tan \alpha_{m1} - \tan \alpha_w) + z_2(\tan \alpha_{m2} - \tan \alpha_w)}{2\pi} = 1,4$$

Como puede apreciarse en este ejemplo $\varepsilon > 1$, lo cual garantiza que exista un contacto continuo entre los pares de dientes en la zona de engranaje, requisito indispensable para una transmisión por engranaje.

3- Analizando el ejemplo 1, pero con el número de dientes de la rueda igual a 18, es decir: $m = 5$; $\alpha = 20^\circ$; $h_a^* = 1$; $C_a^* = 0,25$; $z_1 = 8$; $z_2 = 18$; $x_1 = x_2 = 0$.

Solución:

$$\alpha_w = \alpha = 20^\circ, \text{ ya que } x_\Sigma = x_1 + x_2 = 0$$

$$a_w = m \cdot (z_1 + z_2) / 2 = 65 \text{ mm}$$

$$r_{b1} = \frac{m \cdot z_1}{2} \cdot \cos \alpha = 18,793852 \text{ mm}$$

$$r_{b2} = \frac{m \cdot z_2}{2} \cdot \cos \alpha = 42,286168 \text{ mm}$$

$$r_1 = \frac{m \cdot z_1}{2} = 20 \text{ mm}$$

$$r_2 = \frac{m \cdot z_2}{2} = 45 \text{ mm}$$

$$r_{f1} = r_1 - m \cdot (h_a^* + C_a^* - x_1) = 13,75 \text{ mm}$$

r_{f2} , no es necesario calcularlo porque la rueda no tiene socavado.

$$r_{s1} = \sqrt{r_{b1}^2 + \left(r_{b1} - \frac{r_{f1}}{\cos \alpha}\right)^2} = 19,249057 \text{ mm}$$

$$\overline{A_1 A_2} = a_w \cdot \sin \alpha_w = 22,231309 \text{ mm}$$

$$r_{a1} = \frac{m \cdot (z_1 + 2)}{2} = 25 \text{ mm}$$

$$\overline{A_2 a_1} = A_1 A_2 - \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} = 5,7452201 \text{ mm}$$

$$r_{s2} = \sqrt{A_2 a_1^2 + r_{b2}^2} = 42,674671 \text{ mm}$$

$$\overline{A_1 S_1} = \overline{A_1 A_2} - \sqrt{r_{s2}^2 - r_{b2}^2} = 16,470964 \text{ mm}$$

$$\overline{A_2 S_2} = \overline{A_1 A_2} - \sqrt{r_{s1}^2 - r_{b1}^2} = 18,069901 \text{ mm}$$

$$\alpha_{m1} = \tan^{-1} \left(\frac{\overline{A_1 S_1}}{r_{b1}} \right) = 41,231380^\circ$$

$$\alpha_{m2} = \tan^{-1} \left(\frac{\overline{A_2 S_2}}{r_{b2}} \right) = 23,138189^\circ$$

Sustituyendo valores en (15) finalmente se obtiene

$$\varepsilon = \frac{z_1(\tan \alpha_{m1} - \tan \alpha_w) + z_2(\tan \alpha_{m2} - \tan \alpha_w)}{2\pi} = 0,8$$

Como puede apreciarse para la transmisión analizada $\varepsilon < 1$. Esto significa que no existe un contacto continuo entre las parejas de dientes.

4- Analizando el ejemplo 3, con cierta corrección en el piñón : $m = 5$, $\alpha = 20^\circ$; $h_a^* = 1$; $C_a^* = 0,25$; $z_1=8$; $z_2=18$; $x_1=0,45$; $x_2=0$.

Solución:

$$\text{inv} \alpha_w = \text{inv} \alpha + 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \tan \alpha = 0,0275033$$

$$\alpha_w = \text{arcinv}(\alpha_w) = 24,32835^\circ$$

$$a_w = \frac{m \cdot (z_1 + z_2)}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} = 67,032 \text{ mm}$$

$$r_{b1} = \frac{m \cdot z_1}{2} \cdot \cos \alpha = 18,793852 \text{ mm}$$

$$r_{b2} = \frac{m \cdot z_2}{2} \cdot \cos \alpha = 42,286168 \text{ mm}$$

$$r_1 = \frac{m \cdot z_1}{2} = 20 \text{ mm}$$

$$r_2 = \frac{m \cdot z_2}{2} = 45 \text{ mm}$$

$$r_{f1} = r_1 - m \cdot (h_a^* + C_a^* - x_1) = 16 \text{ mm}$$

r_{f2} , no es necesario calcularlo porque la rueda no tiene socavado.

$$r_{s1} = \sqrt{r_{b1}^2 + \left(r_{b1} - \frac{r_{f1}}{\cos \alpha}\right)^2} = 18,876737 \text{ mm}$$

$$\overline{A_1 A_2} = a_w \cdot \sin \alpha_w = 27,614856 \text{ mm}$$

$$r_{a1} = \frac{m \cdot (z_1 + 2)}{2} = 25 \text{ mm}$$

$$\overline{A_2 a_1} = A_1 A_2 - \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} = 8,1877609 \text{ mm}$$

$$r_{s2} = \sqrt{A_2 a_1^2 + r_{b2}^2} = 43,071562 \text{ mm}$$

$$\overline{A_1 S_1} = \overline{A_1 A_2} - \sqrt{r_{s2}^2 - r_{b2}^2} = 19,427094 \text{ mm}$$

$$\overline{A_2 S_2} = \overline{A_1 A_2} - \sqrt{r_{s1}^2 - r_{b1}^2} = 25,847848 \text{ mm}$$

$$\alpha_{m1} = \tan^{-1} \left(\frac{\overline{A_1 S_1}}{r_{b1}} \right) = 45,949185^\circ$$

$$\alpha_{m2} = \tan^{-1} \left(\frac{\overline{A_2 S_2}}{r_{b2}} \right) = 31,435781^\circ$$

Sustituyendo valores en (15) finalmente se obtiene:

$$\varepsilon = \frac{z_1(\tan \alpha_{m1} - \tan \alpha_w) + z_2(\tan \alpha_{m2} - \tan \alpha_w)}{2\pi} = 1,2$$

Como puede apreciarse en este ejemplo $\varepsilon > 1$, lo cual garantiza que exista un contacto continuo entre los pares de dientes en la zona de engranaje, requisito indispensable para una transmisión por engranaje.

5- Conclusiones.

- Del análisis realizado puede apreciarse que la fórmula para el cálculo de la razón de contacto posee una estructura semejante a la empleada en los engranajes sin socavado, solo se sustituyen α_{a1} y α_{a2} por α_{m1} y α_{m2} respectivamente. Lo anterior se debe a que para los engranajes con socavado el punto limite sobre los dientes no es su diámetro exterior sino un punto sobre el perfil de evolvente, que depende del r_s de cada engrane.

- Se puede lograr una transmisión con engranes socavados que garantiza una razón de contacto $\varepsilon \geq 1,2$.
- El radio r_s de cada engrane adopta formas particulares en dependencia de si el engrane tiene o no socavado, ver las expresiones (5) y (16). La formula (5) brinda resultados muy aproximados a la realidad. Un procedimiento más exacto para el cálculo de este parámetro exige la solución de un sistema de ecuaciones no lineales, mediante métodos numéricos, lo que haría excesivamente extenso este trabajo. lo que será tratado en otro próximamente.

6- Bibliografía.

- 1- Maag Gear Company Ltd; Maag Gear. Book. Zurich.1990.
- 2- Y. Golubev; Teoría de Maquinas y Mecanismos. Ediciones R, Instituto Cubano del Libro, Cuba 1967.
- 3- I.M.Chernin; Manual de Calculo de Elementos de Maquinas. Escuela Superior. Minsk 1964.
- 4- V. I. Anuriev; Manual del Constructor de Maquinaria, Tomo II. Edit. Machinostroienie, Moscú. 1982.

Contact rate in right cylindrical gears with undercut.

Abstract.

Presently paper deals with the development and application of a series of expressions that allow to evaluate the contact ratio in gear transmissions where the pinion and the wheel possess undercut. The procedure is also shown for the application of these expressions, by means of the solution of four problems.

Key words: Undercut, trochoid, evolvent, spur gear, contact reason.