

Antiguo procedimiento como nueva técnica alternativa en el cálculo optimizado de engranajes.

G. González Rey.

Instituto Superior Politécnico *José Antonio Echeverría* (CUJAE).
Facultad de Ingeniería Mecánica. Departamento de Mecánica Aplicada
calle 119 s/n, CUJAE, Marianao 15, Ciudad de la Habana, Cuba.
Teléfono: (537)-202267, Fax: (537)-277129
E-mail: cidim@mecanica.ispjae.edu.cu

(Recibido el 15 de Enero de 2003; aceptado el 27 de febrero de 2005)

Resumen.

A pesar de que la optimización y el diseño racional de los engranajes han sido temas de muchas investigaciones, aún siguen siendo del interés de muchos especialistas y estudiosos de los engranajes. Las razones fundamentales para este hecho están condicionadas en primer lugar a que el diseño de un engranaje es en extremo complejo debido al número de variables, limitaciones y relaciones que involucra, y por otro lado existe la particularidad de que para cada caso de optimización la función objetivo, las restricciones y las variables independientes son generalmente diferentes. Desde hace más de dos décadas, el método de búsqueda exhaustiva, como técnica de localización de los extremos de una función objetivo, es sin lugar a dudas uno de los procedimientos de optimización más empleado en el cálculo racional de los engranajes. En el trabajo se exponen las bases del método de búsqueda exhaustiva y es mostrada su aplicabilidad en la síntesis geométrica racional de un engranaje cónico de dientes rectos.

Palabras claves: Engranaje cónico, optimización, diseño, método de búsqueda exhaustiva.

1. Introducción.

Durante las primeras dos décadas de este siglo, el cálculo de transmisiones por engranajes consistía, esencialmente, en la búsqueda de una combinación de número de dientes y módulo, que proporcionara la relación de transmisión deseada y la suficiente resistencia de sus dientes mediante tablas confeccionadas a tal efecto [1]. Como podrá suponerse, los diseños eran bastantes conservadores y basados fundamentalmente en transmisiones que habían mostrado suficiente capacidad de trabajo. Posteriormente, entre 1925 y 1950, los trabajos en la normalización geométrica y cálculo de la capacidad de carga permitieron establecer las verdaderas bases para el diseño racional de los engranajes.

Desde sus inicios, el desarrollo de las computadoras electrónicas ha influido en gran medida en los procedimientos de cálculo empleados en los engranajes. El advenimiento de las computadoras electrónicas, propició que diferentes programas de computación [2] basados en normas y procedimientos establecidos prácticamente, sustituyeran las tablas y reglas de cálculo empleadas en el diseño de los engranajes durante años, permitiendo un sustancial aumento de la rapidez y precisión de los cálculos.

A pesar de ello, la relativa poca velocidad de los procesadores matemáticos (véase tabla 1), el auge de nuevos métodos de optimización (Simplex, Programación Dinámica, etc.) [3] y las numerosas combinaciones de variables que involucra el cálculo de los engranajes, no permitían ver al método de búsqueda exhaustiva como una técnica efectiva en la determinación del engranaje óptimo. Durante las décadas comprendidas entre los años 50 y 60, muchos de los procedimientos para la optimización de los engranajes empleaban como base el método de la primera derivada de la función objetivo [4, 5].

En las dos últimas décadas, el análisis de algunas publicaciones dirigidas a la optimización de los engranajes, como las realizadas por Dana (1969) [7], Escanaverino (1984) [8] y Ruiz (1987) [9] permiten reconocer que el método de búsqueda exhaustiva comienza a ser empleado intensamente en la optimización del cálculo de los engranajes. También en esta época, otros investigadores realizan la búsqueda del diseño óptimo de los engranajes empleando otros procedimientos teóricos como el conocido método de la primera derivada de la función objetivo [10] o utilizando vías prácticas mediante ensayos fotoelásticos y electromagnéticos [11].

Tabla 1.- Miniaturización y velocidad de cálculo de las computadoras entre 1945 y 1965 [6].

Año	Tecnología	Componentes por m ³	Velocidad de cálculo Hz
1947	Válvulas de vacío grandes	8600	3'500
1953	Válvulas de vacío pequeñas	54000	17'000
1960	Transistores	400000	229'000
1964	Transistores miniaturizados lógicos	800000	2'500'000

En la década actual, la introducción de poderosos medios de cómputo con elevadas velocidades de cálculo, según puede ser visto en la figura 1, ha permitido una consolidación del empleo de la técnica de búsqueda exhaustiva, como lo demuestran los trabajos de López (1993) [12], Fuentes (1993) [13] y González-Rey (1995) [14].

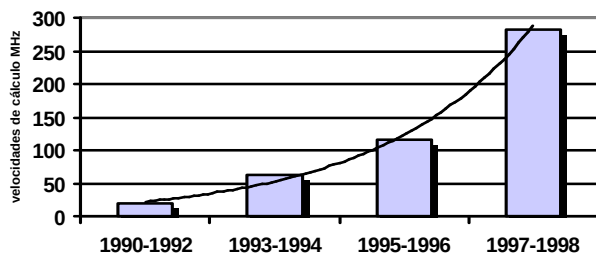


Fig. 1. Velocidad promedio de cálculo de las computadoras personales.

El auge alcanzado por las técnicas de computación y el empleo de las nuevas computadoras con procesadores matemáticos cada vez más veloces, posibilitan incluir este antiguo procedimiento como una nueva y efectiva herramienta de diseño. Por tal motivo, y con el interés de difundir las nuevas perspectivas del método de búsqueda exhaustiva, son mostrados en este trabajo las bases del mencionado procedimiento y su aplicabilidad en el cálculo racional de los engranajes con un ejemplo de relativa elevada complejidad, como puede ser la síntesis geométrica de un engranaje cónico.

2. Optimización de los engranajes mediante el método de búsqueda exhaustiva.

La particularidad del diseño óptimo de un engranaje está condicionado en primer lugar a que el cálculo de un engranaje es en extremo complejo debido al número de variables, limitaciones y relaciones que involucra, y por otro lado existe el hecho de que para cada caso de optimización la función objetivo, las restricciones y las variables independientes son generalmente diferentes.

La mayoría de los especialistas, que han tratado la optimización del engranaje mediante el método de búsqueda exhaustiva, organizan una evaluación de la

función objetivo con los valores admisibles de los parámetros de diseño, que les permite comparar y retener en cada paso el extremo de la función. La sencilla organización de los cálculos y una buena flexibilidad ante modificaciones de la función objetivo, ha permitido al método de búsqueda exhaustiva brindar buenos resultados en varios cálculos de optimización realizados recientemente. Por ejemplo, se conocen de investigaciones dirigidas a minimizar el deslizamiento entre los dientes [13], el costo y el ruido [12] o maximizar el coeficiente de recubrimiento [13] y la capacidad de carga [8,14]. Pero en todos los casos, la aplicación del procedimiento ha requerido un estudio de la geometría del engranaje, una organización del procedimiento de evaluación de la función objetivo y una definición de las restricciones durante la generación de las variantes o alternativas.

Como muestra la figura 2, la organización del proceso de localización del extremo de una función objetivo mediante una búsqueda exhaustiva es relativamente sencilla. A pesar de ello, es conveniente que se preste especial atención a la correcta elaboración del modelo matemático, a la definición del extremo a localizar y al procedimiento de generación de las alternativas. Los tres aspectos antes mencionados tienen una capital importancia en el método de búsqueda exhaustiva pues de ellos depende la efectividad del proceso.

3. Ejemplo de aplicación del método de búsqueda exhaustiva.

Se ha creído conveniente, presentar la aplicabilidad del método de búsqueda exhaustiva mediante un ejemplo, dirigido al cálculo de un engranaje cónico de dientes rectos en el que se exige la mayor capacidad de carga y se limita el diámetro de cresta exterior de la rueda.

3.1. Reconocimiento del problema.

El problema consiste en diseñar un engranaje cónico de dientes rectos con elevada capacidad de resistencia a la picadura de los dientes en sus flancos según la norma ANSI/AGMA 2003 [15] (en versión métrica), tomándose en consideración que las condiciones tecnológicas y de montaje prevén: razón de engranaje igual a 2, diámetro máximo de la rueda de 200 mm, dientes abarillados, cementados y endurecidos a 55HRC, piñón en voladizo y rueda entre apoyos,

frecuencia de rotación del piñón de 500 min^{-1} , módulos normalizados según ISO 54-77, grado 8 de precisión ISO (AGMA Q9), esfuerzo admisible de contacto de 1380 MPa, carga transmitida de forma uniforme, relación de ancho relativo a la distancia cónica exterior de 0,3 y parámetros de la herramienta de referencia según ISO 57-74 ($\alpha = 20^\circ$, $h_a^* = 1$, $c^* = 0.25$, $\rho^* = 0.25$).

3.2. Establecimiento de la función objetivo.

Es importante reconocer, para que sea válida prácticamente la capacidad de carga calculada en los engranajes, el cumplimiento de ciertos índices de calidad geométrica, asociados con posibles limitaciones a sus dimensiones, normal funcionamiento del engranaje y la resistencia de la cresta de los dientes. Generalmente, el cumplimiento de estos aspectos es analizado a partir de valores límites e indicadores geométricos que establecen restricciones en el campo de las soluciones posibles para las diferentes combinaciones de los parámetros geométricos del

engranaje.

En ese sentido fueron declaradas las siguientes restricciones a las soluciones geométricas:

- a) Coeficiente de recubrimiento $\varepsilon_{v\alpha}$ mayor que 1,1.
- b) Espesor medio de cresta del diente s_a superior a un 40% del módulo medio.
- c) No ocurrencia de interferencia en el engranaje.
- d) Diámetro de cresta exterior de la rueda menor o igual a 200 mm.

Finalmente fue creado un modelo matemático que vincula la capacidad de carga y la geometría del engranaje, siendo la variable a maximizar el momento torsor que puede ser aplicado en el piñón [T_{1C}], por el vínculo que permite establecer entre la resistencia del engranaje y su geometría.

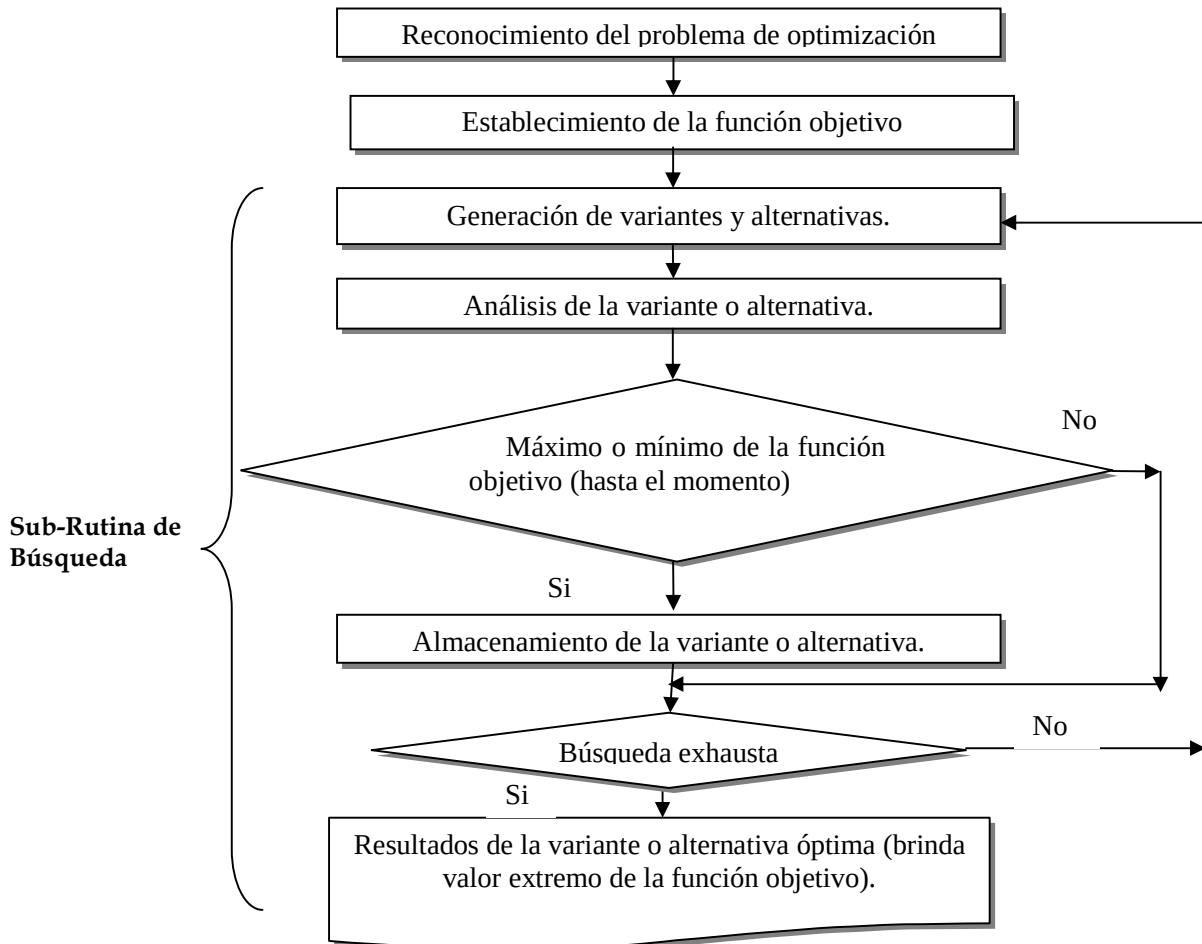


Fig. 2.- Búsqueda exhaustiva del extremo de una función objetivo en la optimización de engranajes.

Modelo matemático de un engranaje cónico de dientes rectos con interrelación de la geometría y la capacidad de carga según el criterio AGMA de resistencia a los esfuerzos de contacto.

➤ Variables del modelo [cantidad = 47] :

a_v : Distancia inercial del engranaje virtual (mm).
 b : Ancho de los dientes. Se considera igual al ancho del engranaje (mm).
 c^* : Factor de holgura radial en el engranaje.
 d_{ae2} : Diámetro de cresta exterior de rueda (mm).
 d_{e2} : Diámetro de referencia exterior de rueda (mm).
 d_{m1} : Diámetro medio del piñón (mm).
 d_{va1} : Diámetro de cresta virtual en el piñón (mm).
 d_{va2} : Diámetro de cresta virtual en la rueda (mm).
 d_{vb1} : Diámetro básico virtual en el piñón (mm).
 d_{vb2} : Diámetro básico virtual en la rueda (mm).
 h_a^* : Factor de altura de la cabeza del diente.
 h_{ae2} : Altura exterior de la cabeza del diente en la rueda (mm).
 h_{am1} : Altura media de la cabeza del diente en el piñón (mm).
 h_{am2} : Altura media de la cabeza del diente en la rueda (mm).
 h_{fm1} : Altura media del pie del diente en el piñón (mm).
 K_A : Factor por aplicación de la carga.
 $K_{H\beta}$: Factor de distribución longitudinal de la carga.
 K_{mb} : Coeficiente por modificación de la distribución de carga.
 K_V : Factor de carga dinámica interna.
 K_{VA} : Factor auxiliar para el cálculo de K_V .
 K_{VB} : Factor auxiliar para el cálculo de K_V .
 m : Módulo medio (mm).
 m_e : Módulo exterior (mm).
 n_1 : Frecuencia de rotación del piñón (min^{-1}).
 Q_{iso} : Grado de precisión según ISO 1328-1.
 R_e : Distancia cónica exterior (mm).
 R_m : Distancia cónica media (mm).

s_1 : Espesor medio del diente (mm).
 s_{a1}^* : Factor del espesor medio en la cresta del diente.
 $[T_{1C}]$: Momento torsor admisible en el piñón por esfuerzos de contacto (Nmm).
 u : Razón de engranaje.
 v_e : Velocidad circunferencial exterior (m/s).
 x_{hm1} : Coeficiente de corrección radial en el piñón a la distancia cónica media.
 x_{hm2} : Coeficiente de corrección radial en la rueda a la distancia cónica media.
 x_{sm1} : Coeficiente de corrección tangencial en el piñón a la distancia cónica media.
 z_1 : Número de dientes en el piñón.
 Z_1 : Factor geométrico de resistencia a la picadura.
 z_{v1} : Número de dientes virtuales del piñón.
 z_{v2} : Número de dientes virtuales de la rueda.
 Z_x : Factor de tamaño.
 Z_{xc} : Factor por abarillado de los dientes.
 α : Ángulo de presión. (Ángulo de flancos en los dientes en la rueda plana de referencia).
 α_{a1} : Ángulo de presión en la cresta del diente del piñón.
 δ_2 : Ángulo del semicono de referencia en la rueda.
 $\varepsilon_{v\alpha}$: Coeficiente de recubrimiento virtual.
 σ_{HP} : Esfuerzo de contacto admisible (MPa).
 ψ_{bre} : Relación entre el ancho de engranaje y la distancia cónica exterior.

➤ Relaciones entre las variables del modelo [cantidad 32] :

$$\begin{aligned}
 [R1] \quad & m \cdot \pi \cdot \cos \alpha \cdot \varepsilon_{v\alpha} + a_v \cdot \sin \alpha - 0.5 \cdot \left(\sqrt{d_{va1}^2 - d_{vb1}^2} + \sqrt{d_{va2}^2 - d_{vb2}^2} \right) = 0 \\
 [R2] \quad & 2 \cdot a_v \cdot u - d_{m1} \cdot \sqrt{(u^2 + 1)^3} = 0 \\
 [R3] \quad & (d_{va1} - 2 \cdot h_{am1}) \cdot u - d_{m1} \cdot \sqrt{u^2 + 1} = 0 \\
 [R4] \quad & d_{va2} - 2 \cdot h_{am2} - d_{m1} \cdot u \cdot \sqrt{u^2 + 1} = 0 \\
 [R5] \quad & d_{vb1} \cdot u - d_{m1} \cdot \sqrt{u^2 + 1} \cdot \cos \alpha = 0 \\
 [R6] \quad & d_{vb2} - d_{m1} \cdot u \cdot \sqrt{u^2 + 1} \cdot \cos \alpha = 0 \\
 [R7] \quad & h_{am1} - h_a^* \cdot m - x_{hm1} \cdot m = 0 \\
 [R8] \quad & h_{am2} - x_{hm2} \cdot m - h_a^* \cdot m = 0 \\
 [R9] \quad & z_{v1} \cdot u - z_1 \cdot \sqrt{u^2 + 1} = 0 \\
 [R10] \quad & \frac{z_{v2}}{z_{v1}} - u^2 = 0 \\
 [R11] \quad & \tan^{-1} \left(\frac{1}{u} \right) + \delta_2 - 90^\circ = 0 \\
 [R12] \quad & h_{ae2} - h_{am2} - \frac{b \cdot h_{fm1}}{2 \cdot R_m} = 0
 \end{aligned}$$

$$[R13] \quad d_{ae2} - d_{e2} - 2 \cdot h_{ae2} \cdot \cos \delta_2 = 0$$

$$[R14] \quad v_e \cdot 60000 \cdot u - \pi \cdot d_{e2} \cdot n_1 = 0$$

$$[R15] \quad d_{m1} - m \cdot z_1 = 0$$

$$[R16] \quad R_m - R_e + 0,5 \cdot b = 0$$

$$[R17] \quad \frac{m}{m_e} - \frac{R_m}{R_e} = 0$$

$$[R18] \quad d_{e2} - m_e \cdot z_1 \cdot u = 0$$

$$[R19] \quad x_{hm2} + x_{hm1} = 0$$

$$[R20] \quad h_{fm1} + x_{hm1} \cdot m - (h_a^* + c^*) \cdot m = 0$$

$$[R21] \quad b - \Psi_{bre} \cdot R_e = 0$$

$$[R22] \quad 2 \cdot R_e \cdot \sin \delta_2 - d_{e2} = 0$$

$$[R23] \quad Kv_B - 0,25 \cdot (Q_{ISO} - 5)^{0,667} = 0$$

$$[R24] \quad Kv_A - 50 - 56 \cdot (1 - Kv_B) = 0$$

$$[R25] \quad Kv - \left(1 + \frac{\sqrt{200 \cdot v_e}}{Kv_A} \right)^{-Kv_B} = 0$$

$$[R26] \quad K_{H\beta} - k_{mb} - 5,6 \cdot 10^{-6} \cdot b^2 = 0$$

$$[R27] \quad Z_X = 0,00492 \cdot b + 0,4375$$

$$[R28] \quad Z_I = f(z_1, u, \alpha, h_a^*, \Psi_{bre}, x_{hm1})$$

$$[R29] \quad \frac{S_1}{m} - 0,5 \cdot \pi - 2 \cdot x_{hm1} \cdot \tan \alpha - x_{sm1} = 0$$

$$[R30] \quad d_{va1} \cdot u \cdot \cos \alpha_{a1} - d_{m1} \cdot \cos \alpha \cdot \sqrt{u^2 + 1} = 0$$

$$[R31] \quad \frac{S_{a1}^* \cdot m}{d_{va1}} - \frac{S_1 \cdot u}{d_{m1} \cdot \sqrt{u^2 + 1}} - \text{inv} \alpha + \text{inv} \alpha_{a1} = 0$$

$$[R32] \quad [T_{1C}] = \frac{b \cdot Z_I \cdot d_{e1}^2 \cdot \sigma_{HP}^2}{72200 \cdot K_A \cdot K_{H\beta} \cdot Kv \cdot Z_{XC} \cdot Z_X}$$

3.3. Organización de la búsqueda y análisis de las variantes.

Un análisis del modelo matemático permite definir las variables incógnitas y establecer las variables de entrada, de salida y las independientes en el problema. Posteriormente, mediante un pareo perfecto de las variables incógnitas del problema [16] y las relaciones establecidas en el modelo matemático puede ser determinado el orden de cálculo en el procedimiento de síntesis racional. En el problema de optimización fueron definidos el módulo exterior, el número de dientes en el piñón y el coeficiente de corrección radial como grados de libertad. La organización de la evaluación de la función objetivo con los valores admisibles de los parámetros de diseño permite comparar y retener en cada paso el extremo de la función según se muestra en las figuras 3 y 4.

3.4. Resultados de la variante óptima.

Mediante el procedimiento de búsqueda exhaustiva descrito en las figuras 3 y 4 pudo ser obtenida la solución geométrica que garantiza una máxima capacidad de carga a esfuerzos de contacto:

Módulo exterior = 2.0

Número de dientes en el piñón = 49

Coeficiente de corrección radial (x_{hm1}) = 0.6

Coeficiente de corrección tangencial (x_{sm1}) = 0.0

Diámetro de cresta exterior de la rueda = 196.78 mm

Ancho de engranaje = 32.9 mm

Momento torsor admisible en el piñón = 704 Nm

3.5. Síntesis del engranaje combinando la resistencia a esfuerzos de contacto y flexión.

Pocas veces es requerido en la ingeniería de engranajes un diseño dirigido a garantizar exclusivamente un único criterio de capacidad de carga, como es el caso antes expuesto. Generalmente, el diseño racional de un engranaje se caracteriza por la solución a problemas de optimización multicriterial.

Es conocido que los problemas multicriteriales pueden tener diferentes enfoques dependiendo del carácter de las variables a maximizar [3]3. Para el caso de una optimización multicriterial de variables con naturalezas físicas diferentes puede ser empleado un criterio generalizado basado en la ponderación que se le otorgue a los respectivos componentes del criterio de optimización. Como se comprenderá, bajo estas condiciones es difícil establecer un criterio satisfactorio para la normalización de una conveniente ponderación de los componentes del criterio de optimización.

La mayoría de las veces, el cálculo de los engranajes es dirigido a garantizar una elevada capacidad de carga condicionada por su resistencia a los esfuerzos de contacto y de flexión. En estas condiciones, las variables componentes del criterio de optimización pueden ser analizadas como de igual naturaleza física, pudiéndose realizar el cálculo racional como una maximización del valor menor del momento torsor que puede ser transmitido por el piñón previendo su capacidad de resistencia a esfuerzos de contacto y de flexión.

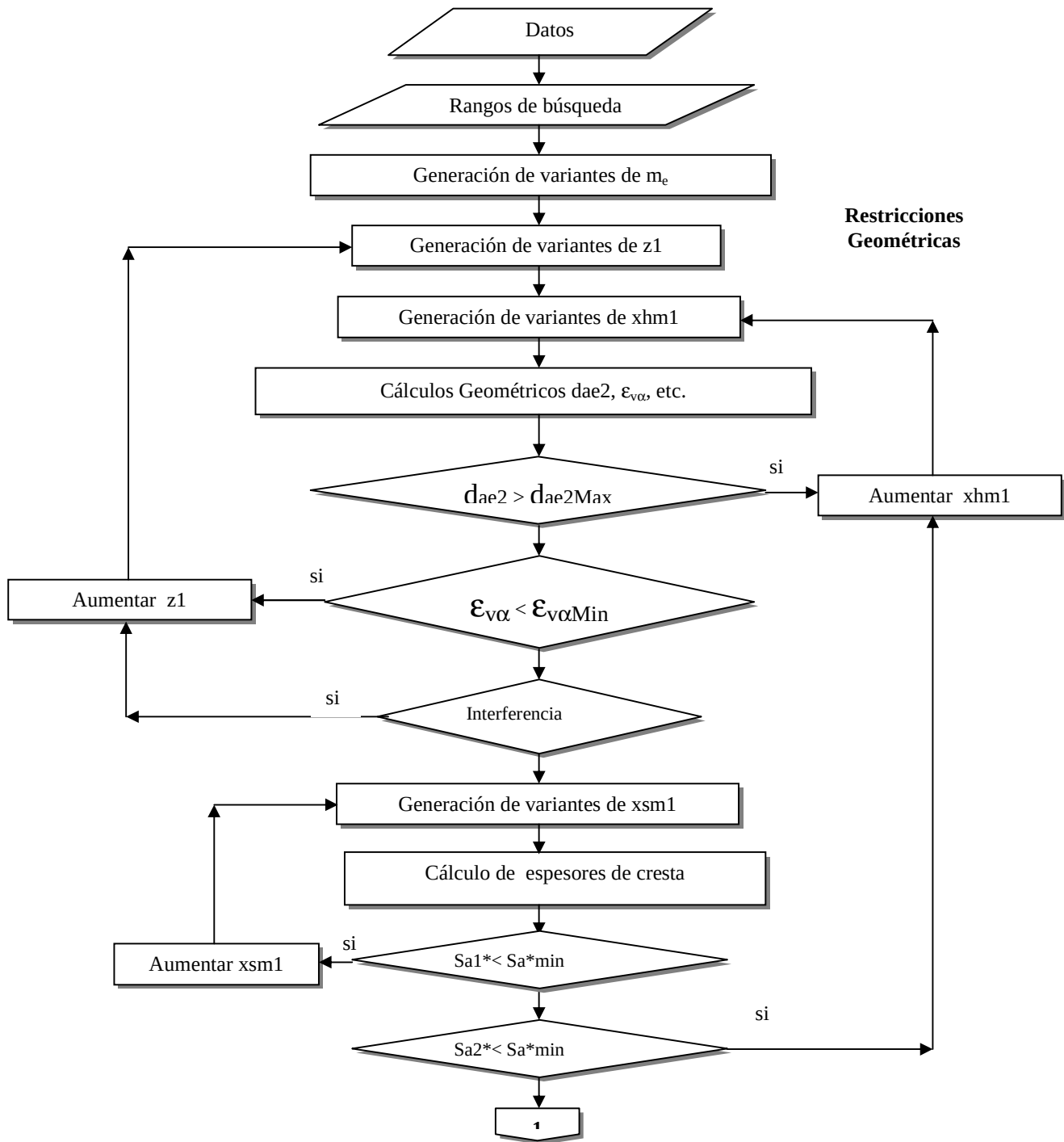


Fig. 3. Síntesis Geométrica de un Engranaje Cónico de Dientes Rectos. Segmento de restricciones geométricas.

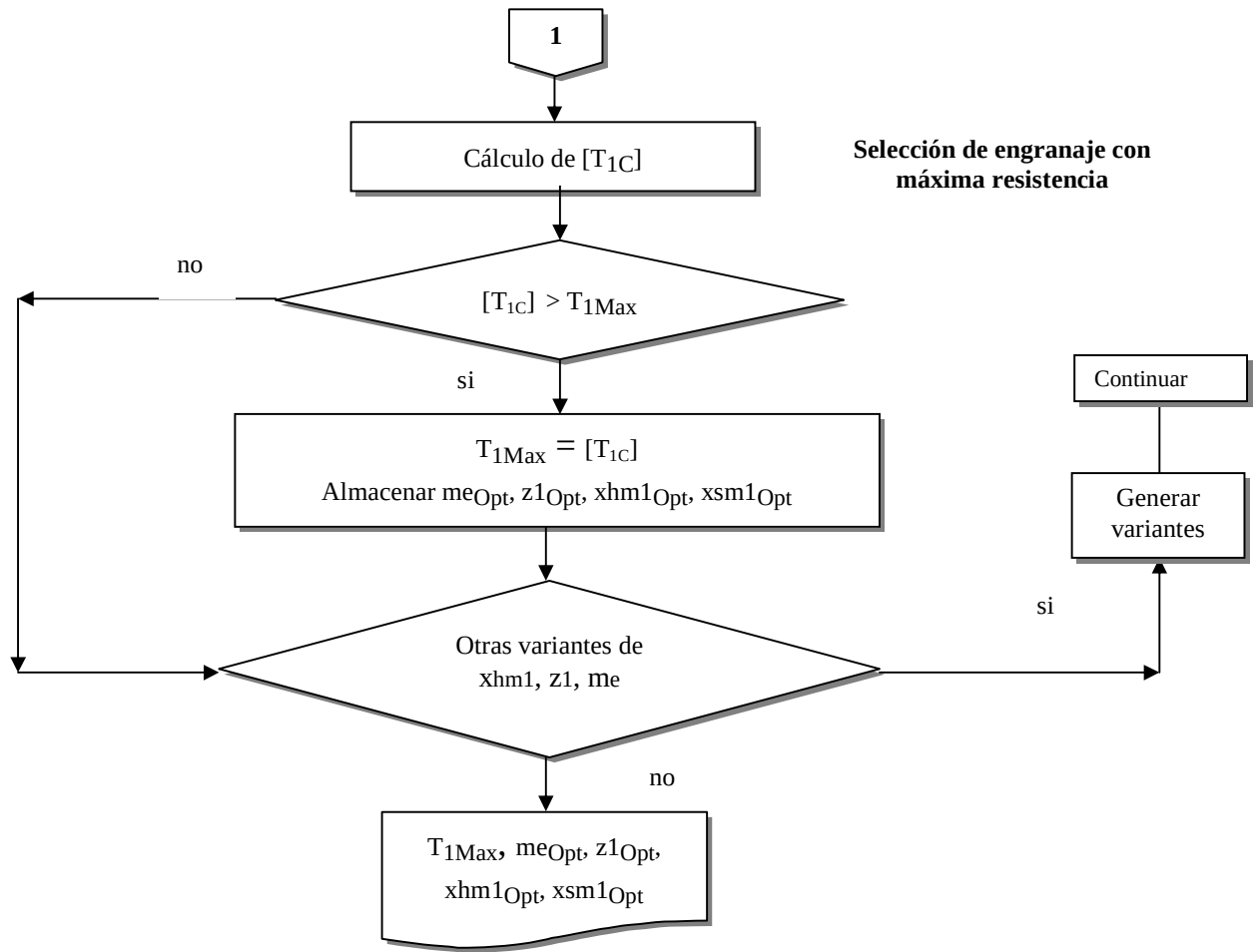


Fig. 4. Síntesis Geométrica de un Engranaje Cónico de Dientes Rectos. Segmento de selección de la variante racional referida a la máxima capacidad de carga según esfuerzos de contacto.

Modelo Matemático de un Engranaje Cónico de Dientes Rectos con Interrelación de Geometría y Capacidad de Carga Según Criterio AGMA de Resistencia a los Esfuerzos de Flexión.

➤ Variables del modelo [cantidad = 48] :

a_v : Distancia inercial del engranaje virtual (mm).
 b : Ancho de los dientes. Se considera igual al ancho del engranaje (mm).
 c^* : Factor de holgura radial en el engranaje.
 d_{ae2} : Diámetro de cresta exterior de rueda (mm).
 d_{e2} : Diámetro de referencia exterior de rueda (mm).
 d_{m1} : Diámetro medio del piñón (mm).
 d_{va1} : Diámetro de cresta virtual en el piñón (mm).
 d_{va2} : Diámetro de cresta virtual en la rueda (mm).
 d_{vb1} : Diámetro básico virtual en el piñón (mm).
 d_{vb2} : Diámetro básico virtual en la rueda (mm).
 h_a^* : Factor de altura de la cabeza del diente.
 h_{ae2} : Altura exterior de la cabeza del diente en la rueda

(mm).
 h_{am1} : Altura media de la cabeza del diente en el piñón (mm).
 h_{am2} : Altura media de la cabeza del diente en la rueda (mm).
 h_{fm1} : Altura media del pie del diente en el piñón (mm).
 K_A : Factor por aplicación de la carga.
 $K_{H\beta}$: Factor de distribución longitudinal de la carga.
 K_{mb} : Coeficiente por modificación de la distribución de carga.
 K_V : Factor de carga dinámica interna.
 K_{VA} : Factor auxiliar para el cálculo de K_V .
 K_{VB} : Factor auxiliar para el cálculo de K_V .

m : Módulo medio (mm).
 m_e : Módulo exterior (mm).
 n_1 : Frecuencia de rotación del piñón (min^{-1}).
 Q_{ISO} : Grado de precisión según ISO 1328-1.
 R_e : Distancia cónica exterior (mm).
 R_m : Distancia cónica media (mm).
 s_1 : Espesor medio del diente (mm).
 s_{a1}^* : Factor del espesor medio en la cresta del diente.
 $[T_{1F}]$: Momento torsor admisible en el piñón por esfuerzos de flexión (Nmm).
 u : Razón de engranaje.
 v_e : Velocidad circunferencial exterior (m/s).
 x_{hm1} : Coeficiente de corrección radial en el piñón a la distancia cónica media.
 x_{hm2} : Coeficiente de corrección radial en la rueda a la distancia cónica media.
 x_{sm1} : Coeficiente de corrección tangencial en el piñón a la distancia cónica media.

x_{sm2} : Coeficiente de corrección tangencial en la rueda a la distancia cónica media.
 Y_J : Factor geométrico de resistencia a la picadura.
 Y_X : Factor de tamaño.
 z_1 : Número de dientes en el piñón.
 z_{v1} : Número de dientes virtuales del piñón.
 z_{v2} : Número de dientes virtuales de la rueda.
 α : Ángulo de presión. (Ángulo de flancos en los dientes en la rueda plana de referencia).
 α_{a1} : Ángulo de presión en la cresta del diente del piñón.
 δ_2 : Ángulo del semicono de referencia en la rueda.
 $\varepsilon_{v\alpha}$: Coeficiente de recubrimiento virtual.
 σ_{FP} : Esfuerzo de flexión admisible (MPa).
 Ψ_{bre} : Relación entre el ancho de engranaje y la distancia cónica exterior.

➤ Relaciones entre las variables del modelo [cantidad 33] :

$$[R1] \quad m \cdot \pi \cdot \cos \alpha \cdot \varepsilon_{v\alpha} + a_v \cdot \sin \alpha - 0.5 \cdot \left(\sqrt{d_{va1}^2 - d_{vb1}^2} + \sqrt{d_{va2}^2 - d_{vb2}^2} \right) = 0$$

$$[R2] \quad 2 \cdot a_v \cdot u - d_{m1} \cdot \sqrt{(u^2 + 1)^3} = 0$$

$$[R3] \quad (d_{va1} - 2 \cdot h_{am1}) \cdot u - d_{m1} \cdot \sqrt{u^2 + 1} = 0$$

$$[R4] \quad d_{va2} - 2 \cdot h_{am2} - d_{m1} \cdot u \cdot \sqrt{u^2 + 1} = 0$$

$$[R5] \quad d_{vb1} \cdot u - d_{m1} \cdot \sqrt{u^2 + 1} \cdot \cos \alpha = 0$$

$$[R6] \quad d_{vb2} - d_{m1} \cdot u \cdot \sqrt{u^2 + 1} \cdot \cos \alpha = 0$$

$$[R7] \quad h_{am1} - h_a^* \cdot m - x_{hm1} \cdot m = 0$$

$$[R8] \quad h_{am2} - x_{hm2} \cdot m - h_a^* \cdot m = 0$$

$$[R9] \quad z_{v1} \cdot u - z_1 \cdot \sqrt{u^2 + 1} = 0$$

$$[R10] \quad \frac{z_{v2}}{z_{v1}} - u^2 = 0$$

$$[R11] \quad \tan^{-1}\left(\frac{1}{u}\right) + \delta_2 - 90^\circ = 0$$

$$[R12] \quad h_{ae2} - h_{am2} - \frac{b \cdot h_{fm1}}{2 \cdot R_m} = 0$$

$$[R13] \quad d_{ae2} - d_{e2} - 2 \cdot h_{ae2} \cdot \cos \delta_2 = 0$$

$$[R14] \quad v_e \cdot 60000 \cdot u - \pi \cdot d_{e2} \cdot n_1 = 0$$

$$[R15] \quad d_{m1} - m \cdot z_1 = 0$$

$$[R16] \quad R_m - R_e + 0.5 \cdot b = 0$$

$$[R17] \quad \frac{m}{m_e} - \frac{R_m}{R_e} = 0$$

$$[R18] \quad d_{e2} - m_e \cdot z_1 \cdot u = 0$$

$$[R19] \quad x_{hm2} + x_{hm1} = 0$$

$$[R20] \quad h_{fm1} + x_{hm1} \cdot m - (h_a^* + c^*) \cdot m = 0$$

$$[R21] \quad b - \Psi_{bre} \cdot R_e = 0$$

$$[R22] \quad 2 \cdot R_e \cdot \sin \delta_2 - d_{e2} = 0$$

$$[R23] \quad K_{vB} - 0.25 \cdot (Q_{ISO} - 5)^{0.667} = 0$$

$$[R24] \quad K_{vA} - 50 - 56 \cdot (1 - K_{vB}) = 0$$

$$[R25] \quad K_v - \left(1 + \frac{\sqrt{200 \cdot v_e}}{K_{vA}} \right)^{K_{vB}} = 0$$

$$[R26] \quad K_{H\beta} - k_{mb} - 5.6 \cdot 10^{-6} \cdot b^2 = 0$$

$$[R27] \quad Y_X = 0.4867 + 0.008399 \cdot m_e$$

$$[R28] \quad Y_J = f(z, u, \alpha, h_a^*, c^*, \rho_f^*, \Psi_{bre}, x_{hm}, x_{sm})$$

$$[R29] \quad \frac{[T_{1F}] \cdot 2 \cdot K_A \cdot K_{H\beta} \cdot K_v \cdot Y_X}{b \cdot Y_J \cdot m_e^2 \cdot z_1 \cdot \sigma_{FP}} - 1 = 0$$

$$[R30] \quad x_{sm2} + x_{sm1} = 0$$

$$[R31] \quad \frac{s_1}{m} - 0.5 \cdot \pi - 2 \cdot x_{hm1} \cdot \tan \alpha - x_{sm1} = 0$$

$$[R32] \quad d_{va1} \cdot u \cdot \cos \alpha_{a1} - d_{m1} \cdot \cos \alpha \cdot \sqrt{u^2 + 1} = 0$$

$$[R33] \frac{S_{a1} \cdot m}{d_{va1}} - \frac{S_1 \cdot u}{d_{m1} \cdot \sqrt{u^2 + 1}} - \text{inv}\alpha + \text{inv}\alpha_{a1} = 0$$

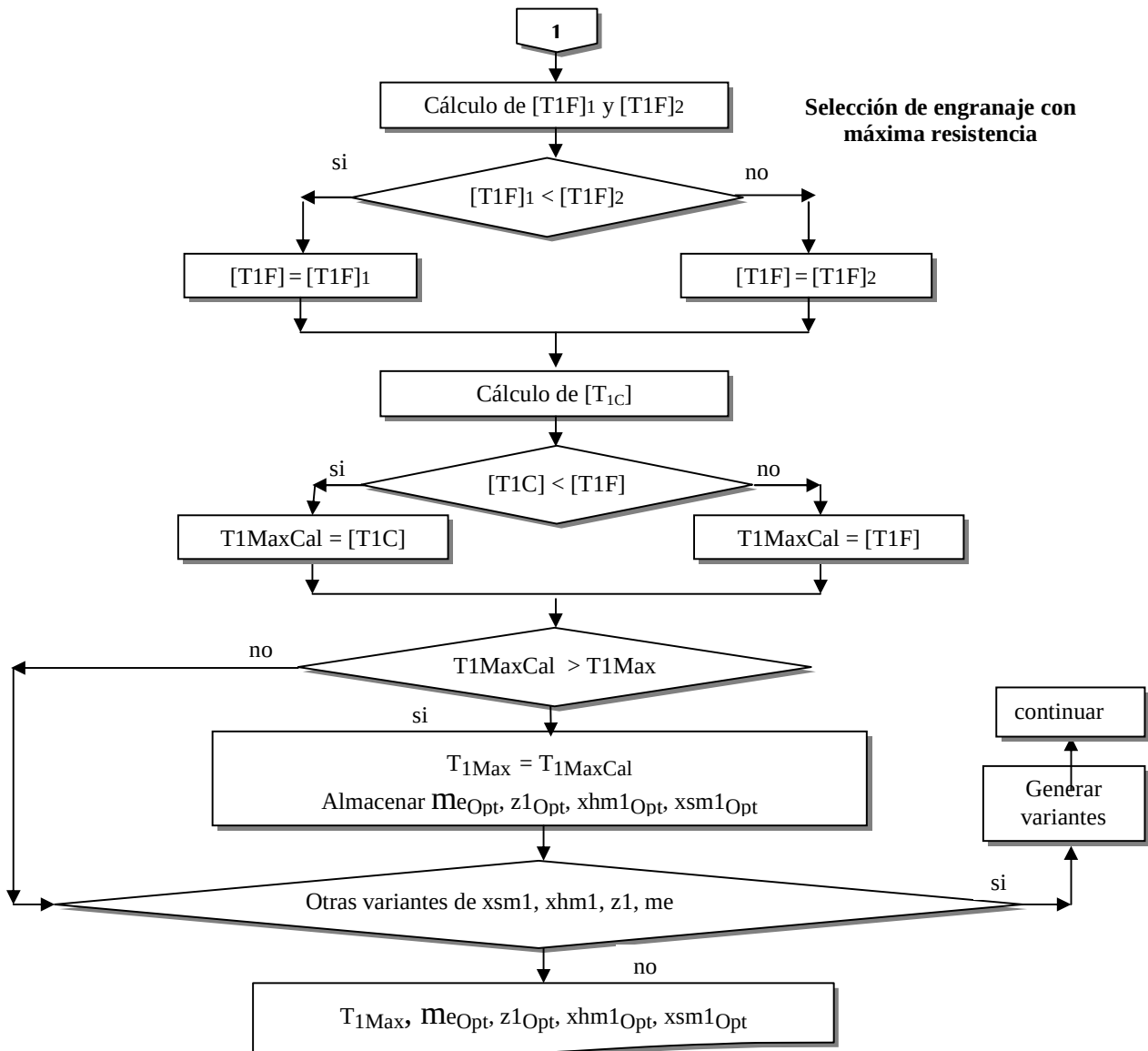
Nuevamente el método de búsqueda exhaustiva permite la localización del extremo de una nueva función objetivo, dirigida en esta ocasión a maximizar la capacidad de carga de un engranaje cónico de dientes rectos, en las condiciones declaradas en el epígrafe 3.4. La organización del procedimiento puede ser realizada según el algoritmo mostrado en las figuras 3 y 5.

Luego de la elaboración de un nuevo modelo matemático, que reflejara la interrelación entre la geometría y la resistencia a esfuerzos de flexión según AGMA 2003 y estableciendo un valor de

esfuerzo de flexión admisible de $[\sigma_F] = 205 \text{ MPa}$ (correspondiente a las condiciones aceptadas para el esfuerzo de contacto admisible) pudo ser obtenida la siguiente solución geométrica que garantiza una máxima capacidad de carga a esfuerzos de contacto y de flexión mediante el algoritmo de búsqueda exhaustiva descrito en las figura 3 y 5, :

Módulo exterior = 6
 Número de dientes en el piñón = 16
 Coeficiente de corrección radial (x_{hm1}) = 0.4
 Coeficiente de corrección tangencial (x_{sm1}) = 0
 Ancho de engranaje = 32.2 mm
 Momento torsor admisible en el piñón = 545 Nm
 Diámetro de cresta exterior de la rueda = 195.42 mm

Fig. 5. Síntesis geométrica de un engranaje cónico de dientes rectos. Segmento de selección de la variante referida a la máxima capacidad de carga según esfuerzos de contacto y de flexión.



En la tabla 2 son mostradas las soluciones geométricas del engranaje analizado ante tres problemas diferentes dirigidos a garantizar: máxima resistencia a esfuerzos de contacto, máxima resistencia a esfuerzos de flexión y máxima resistencia ante esfuerzos de contacto y de flexión. Nótese como la solución donde es maximizado el valor menor del momento torsor admisible en el piñón, previendo una capacidad de resistencia a esfuerzos de contacto y de flexión, es lograda con una

geometría del engranaje capaz de garantizar equi-resistencia a los mencionados esfuerzos.

Una generalización de los resultados obtenidos y reflejados en la figura 6, permite concluir que la dimensión racional del engranaje cónico de dientes rectos cementados se obtiene con aquellas combinaciones de los parámetros geométricos que garantizan una semejante capacidad de carga a los esfuerzos de contacto y de flexión, al ser evaluados según la norma ANSI/AGMA 2003.

Tabla 2. Soluciones de diseños racionales de un engranaje cónico ortogonal de dientes rectos bajo las condiciones declaradas en el epígrafe 3.1 y diferentes criterios de resistencia.

Parámetros	Solución de máxima resistencia:		
	a esfuerzos de contacto	a esfuerzos de flexión	a esfuerzos de contacto y flexión.
Módulo exterior, me.	2.0	8.0	6.0
Número de dientes en el piñón, z1.	49	12	16
Coefficiente de corrección radial, xhm1.	0.60	0.20	0.40
Coefficiente de corrección tangencial, xsm1.	0.00	0.01	0.00
Diámetro de cresta exterior de la rueda, dae2. (mm)	196.78	198.00	195.42
Ancho de engranaje, b. (mm)	32.9	32.2	32.2
Torque admisible en el piñón por contacto, [T1C]. (Nm)	704	450	545
Torque admisible en el piñón por flexión, [T1F]. (Nm)	283	749	575
Momento torsor admisible en el piñón, T1 Max. (Nm)	283	450	545

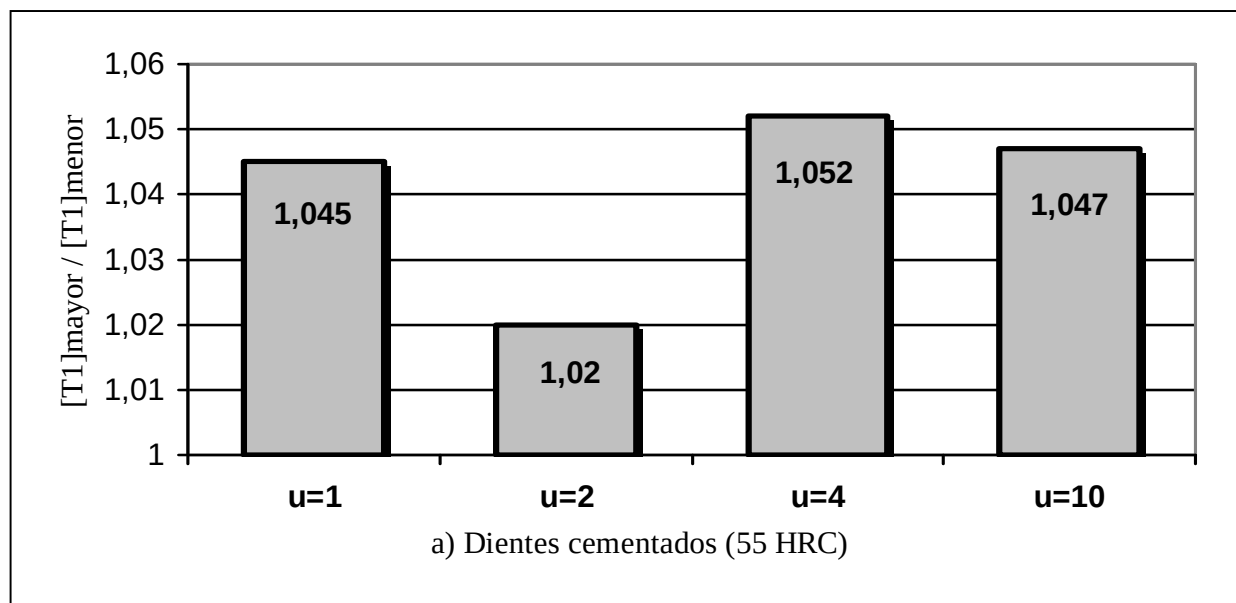


Fig. 6. Promedio de la relación entre el momento mayor permisible, por resistencia a esfuerzos de contacto o flexión, y el momento permisible en engranajes de geometría racional ([T1]menor). Para una exacta equi-resistencia se cumple que $[T1]_{mayor} / [T1]_{menor} = 1$. Condiciones previstas: máxima capacidad de carga según AGMA 2003 en un engranaje cónico ortogonal de dientes rectos, abarillados y cementados a 55 HRC, piñón en voladizo y rueda entre apoyos, coeficientes de seguridad $S_H = S_F = 1$, material con calidad de grado 1, precisión del engranaje ISO 8 (AGMA Q9), $\psi_{bre} = 0.3$, $n_1 = 500 \text{ min}^{-1}$, $sam/m = 0.3$, $K_A = 1.0$, $\epsilon_{\alpha min} = 1.1$, $\alpha = 20^\circ$, $ha^* = 1.0$, $c^* = 0.25$, $\rho_f^* = 0.25$.

Los resultados anteriores fueron obtenidos para los siguientes rangos de valores posibles en las variables asumidas como grados de libertad en el problema de cálculo racional:

Módulos exteriores normalizados: 1, 1.25, 1.5, 2, 2.5, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20
 Número de dientes en el piñón: Desde $z_1 = 10$ hasta $z_1 = 50$
 Coeficiente de corrección radial: Desde $x_{hm1} = 0$ hasta $x_{hm1} = 1.0$, con incremento de 0.05
 Coeficiente de corrección tangencial: Desde $x_{sm1} = 0$ hasta $x_{sm1} = 0.2$, con incremento de 0.01
 Cantidad de variantes posibles de análisis = 253134

Las corridas del programa fueron realizadas en una computadora personal con microprocesador Pentium a

100 MHz y módulo de memoria RAM de 16 MB, en esas condiciones la velocidad de ejecución del programa promedió 255 variantes/segundos. En sentido general, durante la búsqueda de los parámetros geométricos racionales de los engranajes analizados, los tiempos máximos de corrida nunca superaron los 10 minutos. Es destacable que las restricciones geométricas, previstas en los modelos matemáticos del procedimiento de cálculo propuesto, permiten una disminución sensible del número de variantes a examinar durante el proceso de búsqueda exhaustiva. La cantidad de variantes que son realmente analizadas dependen en gran medida de las limitaciones establecidas en el diámetro exterior de cresta de la rueda y de la razón de engranaje. En el ejemplo presentado estaban previstas un total de 253134 variantes y finalmente se analizaron 89625 variantes, representando un 35% de las posibles soluciones.

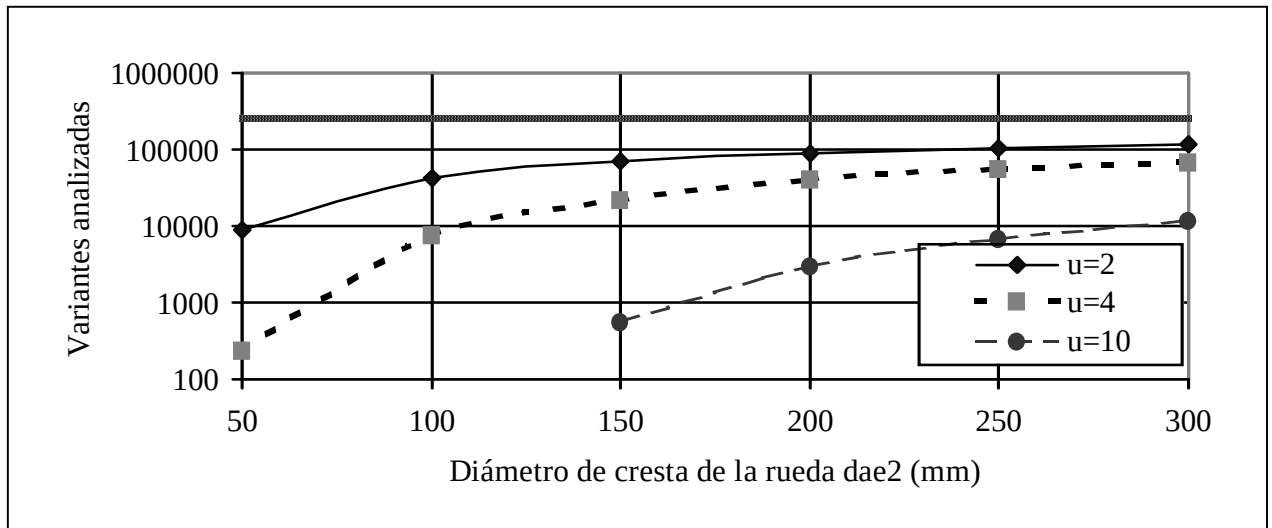


Fig. 7. Cantidad de variantes analizadas en dependencia del diámetro exterior de cresta y la razón de engranaje, mediante el empleo del procedimiento de búsqueda exhaustiva descrito en las figuras 3 y 5.

4. Conclusiones.

- Desde hace más de dos décadas, el método de búsqueda exhaustiva, como técnica de localización de los extremos de una función objetivo, es sin lugar a dudas uno de los procedimientos de optimización más empleado en el cálculo racional de los engranajes. En la década actual, la introducción de poderosos medios de cómputos con elevadas velocidades de cálculo ha permitido una consolidación del empleo de esta técnica como lo demuestran numerosos trabajos dirigidos a una organización de la evaluación de la función objetivo que permita retener en cada paso el valor extremo de la función a optimizar.

- Una correcta aplicación del proceso de búsqueda exhaustiva en los engranajes requiere de una precisa elaboración del modelo matemático, sobre la formulación de la maximización o minimización de la función objetivo, que permita crear un sistema que interrelacione la geometría del engranaje con la resistencia de sus dientes.
- Las restricciones geométricas previstas en los modelos matemáticos del procedimiento de cálculo, permiten una disminución sensible del número de variantes a examinar durante el proceso de búsqueda exhaustiva en la optimización de los engranajes. La cantidad de variantes analizadas dependen en gran medida de las limitaciones establecidas en las dimensiones de las ruedas, la

razón de engranaje y los rangos de búsqueda planteados.

- Una generalización de los resultados obtenidos permite concluir que la máxima capacidad de carga de un engranaje cónico de dientes rectos cementados, al ser evaluados según la norma ANSI/AGMA 2003, se obtiene con aquellas combinaciones de los parámetros geométricos que garantizan una equi-resistencia a los esfuerzos de contacto y de flexión.

5. Bibliografía.

- 1- Houghson, D., GODA5 (Gear Optimization and Design Analyses 5), SAE Paper N° 801026, Warrendale, 1980
- 2- Houghson, D., "Analytical Derivation of Gear Tooth X Factor", Journal of the Industrial Mathematics Society, Volume II, 1951
- 3- Escanaverino, J.M., Curso de Diseño Racional, (no publicado), ISPJAE, Habana, Cuba, 1997
- 4- Willis Jr., R.J., "Lightest-Weight Gears", Product Engineering, Ene. 21, 1963.
- 5- Johnson, R. C., Optimum Design of Mechanical Elements, New York, 1961
- 6- Heller, R. S., Bits y Bytes. Iniciación a la Informática, Madrid, 1984
- 7- Dana, D., Computer-Aided Spur Gear Design, SAE Paper N° 690564, Caterpillar Co., EUA, 1969
- 8- Escanaverino, J.M. y Uli, E. Algunas Experiencias en el Diseño de Engranajes con Ayuda de Computadoras. IV Conferencia Científica de Ingeniería y Arquitectura. ISPJAE, Nov. 1984.
- 9- Ruiz, H., "Cálculo Automatizado de Transmisiones por Engranajes Cilíndricos", Construcción de Maquinaria, Pags. 19-21, Vol. XII, N° 3, Jul-Sep, Las Villas, Cuba, 1987.
- 10- Chicurel, E., "Helical Gear Optimization by the Johnson Method", 7th World Congress of the Theory of Machines and Mechanisms, Sevilla, España, 1987
- 11- Drago, R., "Design Guidelines for High Capacity Bevel Gear Systems", SAE Paper N° 851571, 1985.
- 12- López, R., "Practical Optimization of Helical Gears Using Computer Software", Gear Technology, Pags. 16-21, Vol 10, N°3, Jun. 1993
- 13- Fuentes, J., Selección del Desplazamiento en Engranajes Cilíndricos Basada en el Recubrimiento y el Equilibrado Óptimo de Deslizamientos Específicos. I Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, Madrid, España, 1993.
- 14- González Rey, G., "Cálculo de Engranajes Cónicos". Ingeniería en Transporte, Vol XVI, #1-2, 1995
- 15- ANSI/AGMA 2003-A86. Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Generated Straight Bevel, Zerol Bevel, and Spiral Bevel Gear Teeth, Virginia, 1991.
- 16- Martínez, J., García, A. y Ortiz, T., "Algorítmica del Diseño Mecánico", Ingeniería Mecánica, Pags. 31-35, Vol 0, Ciudad Habana, 1997

Old procedure as a new alternative in the optimized calculation of gears.

Abstract.:

The optimization and rational design of gears have been topics of many investigations and continue being of the interest of many specialists and studios of this field. The fundamental reasons are conditioned in first place to the fact that the gear design is very complex due to the number of variables, limitations and relations that involves, and on the other hand there is the particularity that for each case of optimization the objective function, the restrictions and the independent variables are generally different. Since two decades, the exhaustive search method is one of the optimization procedures more used in the rational calculation of gears. In this paper are exposed the bases of the exhaustive search method and shown its applicability in the rational geometric synthesis of a straight bevel gear.

Keywords: Bevel gear, optimization, design, exhaustive search method.