

Geometría de los engranajes cónicos: Ángulos de los Semi-Conos primitivos y relación de transmisión virtual.

E. Mirabet Lemos , L. Martínez Delgado.*

Empresa Argelio Reyes (PRODAL)

*Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (CUJAE).

Facultad de Ingeniería Mecánica. Departamento de Mecánica Aplicada
calle 116 s/n, CUJAE, Marianao 15, Ciudad de la Habana, Cuba.

Teléfono: (537)-2663613

e.mail: luisricris@yahoo.com.mx, lmartinez@mecanica.cujae.edu.cu

(Recibido el 14 de Noviembre de 2003, aceptado 11 de Febrero de 2004).

Resumen.

En el presente trabajo se realiza la deducción de expresiones generales para el cálculo de los semi-conos primitivos de los engranajes cónicos. Para dicha deducción se realiza un análisis geométrico mediante el empleo de cuatro paralelogramos rectangulares. Las expresiones halladas pueden ser aplicadas a engranajes cónicos con un ángulo cualquiera entre sus ejes.

Palabras claves: Engranajes Cónicos, Relación de Transmisión..

1. Introducción.

Los engranajes cónicos pertenecen al grupo de las transmisiones espaciales y sirven para transmitir el movimiento entre árboles que se intersectan. El ángulo de intersección entre los árboles puede tomar un valor cualquiera. [1]

La cinemática de estas transmisiones está muy relacionada, como se verá en este trabajo, con los semi-ángulos de los conos primitivos δ_1 y δ_2 . El valor del ángulo sumario $\Sigma = \delta_1 + \delta_2$, da origen a tres casos típicos, de engranajes cónicos.

2. Caso 1: ($\Sigma < 90^\circ$)

Para analizar este caso se emplea la Figura 1.

En dicha figura, los triángulos 1 y 2 representan las proyecciones de los semi-conos primitivos del piñón y la rueda respectivamente.

La línea OB representa la generatriz común a ambos conos, y las líneas BA y BC representan los radios primitivos exteriores $\frac{d_{e1}}{2}$ y $\frac{d_{e2}}{2}$ del piñón y la rueda respectivamente. Además OA y OC representan las alturas de los conos primitivos.

Trazando por B una paralela a la altura OC del cono 2, y extendiéndola hasta una perpendicular a la altura OC en O, como muestra la figura 2. Obsérvese que OA divide a la paralela a OC en los segmentos, BD y DF. Para simplificar las notaciones, se hace $X_2 = BD$ y $P_2 = DF$.

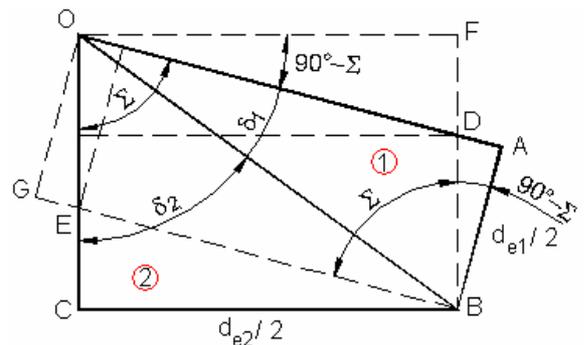


Fig. 1 Semi-conos primitivos con $\Sigma < 90^\circ$

Trazando ahora, por B, una paralela a la altura OA del cono 1, y extendiéndola hasta una perpendicular a la altura OC en O, como muestra la figura 2. Obsérvese que OC divide a la paralela a OA en los segmentos, BE y EG. Para simplificar las notaciones, se hace $X_1 = BE$ y $P_1 = EG$.

Ahora se puede plantear las relaciones siguientes:

$$X_1 = \frac{d_{e2}}{2 \cdot \cos(90^\circ - \Sigma)} \quad (1)$$

$$P_1 = \frac{d_{e1}}{2} \cdot \tan(90^\circ - \Sigma) \quad (2)$$

$$X_2 = \frac{d_{e1}}{2 \cdot \cos(90^\circ - \Sigma)} \quad (3)$$

$$P_2 = \frac{d_{e2}}{2} \cdot \tan(90^\circ - \Sigma) \quad (4)$$

De forma compacta se puede escribir, (1) y (3) de la siguiente forma.

$$X_{1,2} = \frac{d_{e2,1}}{2 \cdot \cos(90^\circ - \Sigma)} \quad (5)$$

También se puede expresar (2) y (4) de forma semejante.

$$P_{1,2} = \frac{d_{e1,2}}{2} \cdot \tan(90^\circ - \Sigma) \quad (6)$$

Obsérve que:

$X_{1,2}$ - representan la proyección de $\frac{d_{e1,2}}{2}$ sobre la paralela al eje del piñón 1 y de la rueda 2 respectivamente, o sea, del engrane que se analiza.

$P_{1,2}$ - representa la altura del cono del engrane que se analiza menos $X_{1,2}$, respectivamente.

Ahora podemos plantear para los ángulos δ_1 y δ_2 :

$$\tan \delta_1 = \frac{d_{e1}}{2 \cdot (X_1 + P_1)} \quad (7)$$

$$\tan \delta_2 = \frac{d_{e2}}{2 \cdot (X_2 + P_2)} \quad (8)$$

De forma compacta se puede escribir (7) y (8) De la siguiente forma.

$$\tan \delta_{1,2} = \frac{d_{e1,2}}{2 \cdot (X_{1,2} + P_{1,2})} \quad (9)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (5) se tiene:

$$\tan \delta_1 = \frac{d_{e1}}{2 \cdot \left[\frac{d_{e2}}{2 \cdot \cos(90^\circ - \Sigma)} + \frac{d_{e1}}{2} \cdot \tan(90^\circ - \Sigma) \right]}$$

$$\tan \delta_1 = \frac{d_{e1}}{\frac{d_{e2}}{\cos(90^\circ - \Sigma)} + \frac{d_{e1} \cdot \sin(90^\circ - \Sigma)}{\cos(90^\circ - \Sigma)}}$$

$$\tan \delta_1 = \frac{d_{e1} \cdot \cos(90^\circ - \Sigma)}{d_{e2} + d_{e1} \cdot \sin(90^\circ - \Sigma)}$$

$$\tan \delta_1 = \frac{\cos(90^\circ - \Sigma)}{U + \sin(90^\circ - \Sigma)} \quad (10)$$

$$\text{donde } U = \frac{Z_2}{Z_1}$$

Sustituyendo (3) y (4) en (8) se tiene:

$$\tan \delta_2 = \frac{d_{e2}}{2 \cdot \left[\frac{d_{e1}}{2 \cdot \cos(90^\circ - \Sigma)} + \frac{d_{e2}}{2} \cdot \tan(90^\circ - \Sigma) \right]}$$

$$\tan \delta_2 = \frac{d_{e2}}{\frac{d_{e1}}{\cos(90^\circ - \Sigma)} + \frac{d_{e2} \cdot \sin(90^\circ - \Sigma)}{\cos(90^\circ - \Sigma)}}$$

$$\tan \delta_2 = \frac{d_{e2} \cdot \cos(90^\circ - \Sigma)}{d_{e1} + d_{e2} \cdot \sin(90^\circ - \Sigma)}$$

$$\tan \delta_2 = \frac{U \cdot \cos(90^\circ - \Sigma)}{1 + U \cdot \sin(90^\circ - \Sigma)} \quad (11)$$

3. Caso 2: ($\Sigma > 90^\circ$)

Haciendo uso de la figura 2, se realiza un análisis semejante al del caso 1.

En dicha figura, los triángulos 1 y 2 representan las proyecciones de los semi-conos primitivos del piñón y la rueda respectivamente.

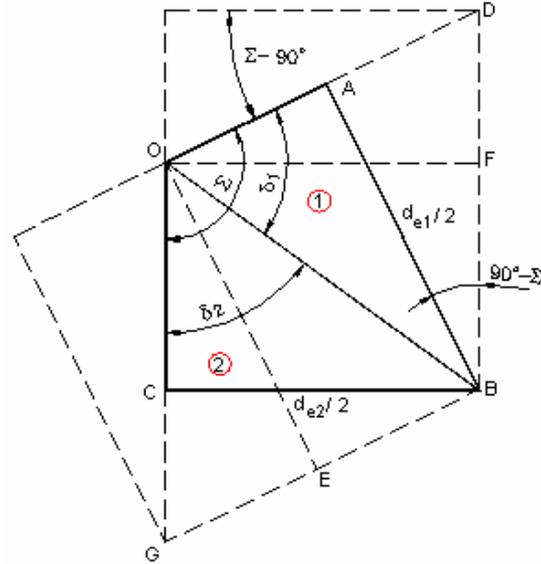


Fig. 2 Semi-conos primitivos con $\Sigma > 90^\circ$

Trazando por B una paralela a la altura OC del cono 2, y extendiéndola hasta intersectar la extensión de OA, dando origen al punto D, como muestra la figura 2.

Trazando por B una paralela a la altura OA del cono 1, y extendiéndola hasta intersectar la extensión de OC, dando origen al punto G, como muestra la figura 2

Si desde O se trazan perpendiculares a BD y BG, se obtienen los puntos F y E. Para simplificar la notación, se

hace $X_1 = BG$ y $X_2 = BD$ así como $P_1 = EG$ y $P_2 = FD$.

Analizando la geometría descrita en este caso se pueden plantear las siguientes relaciones:

$$X_1 = \frac{d_{e2}}{2 \cdot \cos(\Sigma - 90^\circ)} \quad (12)$$

$$P_1 = \frac{d_{e1}}{2} \cdot \tan(\Sigma - 90^\circ) \quad (13)$$

$$X_2 = \frac{d_{e1}}{2 \cdot \cos(\Sigma - 90^\circ)} \quad (14)$$

$$P_2 = \frac{d_{e2}}{2} \cdot \tan(\Sigma - 90^\circ) \quad (15)$$

De forma compacta se puede escribir, (12) y (14) de la siguiente forma.

$$X_{1,2} = \frac{d_{e2,1}}{2 \cdot \cos(\Sigma - 90^\circ)} \quad (16)$$

También se puede expresar (13) y (15) de forma semejante.

$$P_{1,2} = \frac{d_{e1,2}}{2} \cdot \tan(\Sigma - 90^\circ) \quad (17)$$

Ahora se puede plantear para los ángulos δ_1 y δ_2 las siguientes expresiones:

$$\tan \delta_1 = \frac{d_{e1}}{2 \cdot (X_1 - P_1)} \quad (18)$$

$$\tan \delta_2 = \frac{d_{e2}}{2 \cdot (X_2 - P_2)} \quad (19)$$

De forma compacta se puede escribir, (18) y (19) De la siguiente forma.

$$\tan \delta_{1,2} = \frac{d_{e1,2}}{2 \cdot (X_{1,2} - P_{1,2})} \quad (20)$$

Sustituyendo (12) y (13) en (18) se tiene:

$$\tan \delta_1 = \frac{d_{e1}}{2 \cdot \left[\frac{d_{e2}}{2 \cdot \cos(\Sigma - 90^\circ)} - \frac{d_{e1}}{2} \cdot \tan(\Sigma - 90^\circ) \right]}$$

$$\tan \delta_1 = \frac{d_{e1}}{\frac{d_{e2}}{\cos(\Sigma - 90^\circ)} - d_{e1} \cdot \tan(\Sigma - 90^\circ)}$$

$$\tan \delta_1 = \frac{d_{e1}}{\frac{d_{e2}}{\cos(\Sigma - 90^\circ)} - \frac{d_{e1} \cdot \sin(\Sigma - 90^\circ)}{\cos(\Sigma - 90^\circ)}}$$

$$\tan \delta_1 = \frac{d_{e1} \cdot \cos(\Sigma - 90^\circ)}{d_{e2} - d_{e1} \cdot \sin(\Sigma - 90^\circ)}$$

$$\tan \delta_1 = \frac{\cos(\Sigma - 90^\circ)}{U - \sin(\Sigma - 90^\circ)} \quad (21)$$

Sustituyendo (14) y (15) en (19) se tiene:

$$\tan \delta_2 = \frac{d_{e2}}{2 \cdot \left[\frac{d_{e1}}{2 \cdot \cos(\Sigma - 90^\circ)} - \frac{d_{e2}}{2} \cdot \tan(\Sigma - 90^\circ) \right]}$$

$$\tan \delta_2 = \frac{d_{e2}}{\frac{d_{e1}}{\cos(\Sigma - 90^\circ)} - d_{e2} \cdot \tan(\Sigma - 90^\circ)}$$

$$\tan \delta_2 = \frac{d_{e2}}{\frac{d_{e1}}{\cos(\Sigma - 90^\circ)} - \frac{d_{e2} \cdot \sin(\Sigma - 90^\circ)}{\cos(\Sigma - 90^\circ)}}$$

$$\tan \delta_2 = \frac{d_{e2} \cdot \cos(\Sigma - 90^\circ)}{d_{e1} - d_{e2} \cdot \sin(\Sigma - 90^\circ)}$$

$$\tan \delta_2 = \frac{U \cdot \cos(\Sigma - 90^\circ)}{1 - U \cdot \sin(\Sigma - 90^\circ)} \quad (22)$$

4. Caso 3: ($\Sigma = 90^\circ$)

Este es un caso muy particular y se caracteriza porque $P_1 = P_2 = 0$ situación que se presenta cuando los árboles son perpendiculares uno respecto al otro.

Este caso puede ser analizado empleando las fórmulas obtenidas, haciendo $P_1 = P_2 = 0$ en aquellas fórmulas que lo contengan.

$$\text{En dicho caso } X_1 = \frac{d_{e2}}{2} \text{ y } X_2 = \frac{d_{e1}}{2}$$

5. Generalización de los resultados.

Analizando las expresiones (9 y 20), para $\delta_{1,2}$ en cada uno de los casos, se puede expresar de forma más compacta los resultados obtenidos, para ambos casos, de la siguiente forma:

$$\tan \delta_{1,2} = \frac{d_{e1,2}}{2 \cdot (X_{1,2} \pm P_{1,2})} \quad (23)$$

También se puede expresar de forma compacta $X_{1,2}$ y $P_{1,2}$ haciendo uso de las expresiones (5), (16) para $X_{1,2}$ y (6), (17) para $P_{1,2}$ como sigue:

$$X_{1,2} = \frac{d_{e2,1}}{2 \cdot \cos[\pm(90^\circ - \Sigma)]} \quad (24)$$

$$P_{1,2} = \frac{d_{1,2}}{2} \cdot \tan[\pm(90^\circ - \Sigma)] \quad (25)$$

Haciendo uso de las expresiones (10) y (21) se puede expresar δ_1 de forma compacta, para los tres casos analizados, de la siguiente forma [4]:

$$\tan \delta_1 = \frac{\cos[\pm(90^\circ - \Sigma)]}{U \pm \sin[\pm(90 - \Sigma)]} \quad (26)$$

$$\tan \delta_2 = \frac{U \cdot \cos[\pm(90^\circ - \Sigma)]}{1 \pm U \cdot \sin[\pm(90 - \Sigma)]} \quad (27)$$

De la Teoría de las Máquinas y los Mecanismos se conoce que la relación de transmisión virtual, U_V para los engranajes cónicos viene dada por:

$$U_V = \frac{\tan \delta_2}{\tan \delta_1} \quad (28)$$

Sustituyendo (26) y (27) en la expresión anterior se obtiene una formulación de U_V , para los engranajes cónicos en general, en función de la relación de transmisión $U = \frac{Z_2}{Z_1}$ y Σ como se expresa a continuación:

$$U_V = \frac{\tan \delta_2}{\tan \delta_1} = \frac{U \cdot \cos[\pm(90^\circ - \Sigma)]}{1 \pm U \cdot \sin[\pm(90 - \Sigma)]} \cdot \frac{\cos[\pm(90^\circ - \Sigma)]}{U \pm \sin[\pm(90 - \Sigma)]} \quad \text{Obteniéndose:}$$

$$U_V = \frac{U^2 \pm U \cdot \sin[\pm(90 - \Sigma)]}{1 \pm U \cdot \sin[\pm(90 - \Sigma)]} \quad (29)$$

Esta relación de transmisión esta asociada al engranaje cilíndrico virtual o equivalente, empleada en los cálculos de resistencia de los engranajes cónicos. El procedimiento empleado se conoce como *aproximación de Tredgold* [2], [3]

Nota: En las fórmulas de la 21 a la 29, excepto la 28, el doble signo se aplica de la forma siguiente: se usará el signo (+) cuando $\Sigma \leq 90^\circ$ y el (-) cuando $\Sigma \geq 90^\circ$.

6. Conclusiones.

- La expresión (29) es una expresión general para el cálculo de la U_V aplicable a todos los tipos de engranajes cónicos. La expresión se simplifica enormemente en el caso de los engranajes cónicos ortogonales, con $\Sigma = 90^\circ$ en que se obtiene que $U_V = U^2$.

- Las expresiones (26) y (27) permiten calcular los ángulos de los semi-conos primitivos, en función de los mismos parámetros empleados para el cálculo de U_V .

Se puede apreciar que cuando $\Sigma = 90^\circ$, caso 3, se tiene que $\tan \delta_1 = \frac{1}{U}$ y $\tan \delta_2 = U$

- El análisis geométrico realizado está basado en el empleo de cuatro paralelogramos rectangulares, ver figuras 1 y 2, vinculados con la geometría de los engranajes cónicos.

- Todos los paralelogramos se obtienen trazando paralelas a las líneas que definen la altura y los radios primitivos exteriores, de los engranes 1 y 2 respectivamente.

7. Bibliografía.

1. Yuri Golubev; "Teoría de la Máquinas y Mecanismos. Ediciones R, CUBA, 1975.
2. G.Niemann; "Tratado Teórico Práctico de Elementos de Máquinas". Editorial Labor, S.A. Barcelona, 1967.
3. F. Montoya; "Error Calculation of Tredgold's approximation". The Theory of Machines and Mechanics. Proceeding of the 7th World Congress. Sevilla, España, 1987. Norma ISO 10300-1

Geometry of Bevel Gear: Angles of primitive semi-cones and ratio of virtual transmission.

Abstract.

In the present work is carried out the deduction of general expressions for the calculation of primitive semi-cones of the conical engagements. For this deduction is carried out a geometric analysis, by means of the employment of four rectangular parallelograms. The found expressions can be applied to conical engagements with an angle anyone among their axes.

Key words: Bevel gear, ratio of transmission.