

Factores geométricos para calcular a flexión engranajes cilíndricos rectos asimétricos con perfil evolvente - trocoide

Javier Antonio Cárdenas-Oliveros, Jorge Laureano Moya-Rodríguez, Daniel R. Hernández-Ochoa

Recibido el 29 de noviembre de 2010; aceptado el 19 de julio de 2011

Resumen

Se propone un modo de cálculo analítico basado en el análisis del modelo gráfico del diente de los engranajes cilíndricos rectos asimétricos con perfil de evolvente y trocoide, que permite obtener las variables asociadas a la determinación de los factores geométricos de forma y de resistencia, necesarios para el cálculo de la resistencia a flexión. Este tipo de procedimiento es empleado por primera vez para obtener el parámetro geométrico de forma. Además, se establecen los fundamentos que aportan la determinación del parámetro geométrico de resistencia J para estos tipos de engranajes. Los resultados de la presente investigación permiten determinar el esfuerzo máximo a la flexión a partir de los coeficientes geométricos de forma y resistencia, se construyeron ecuaciones, tablas y diagramas representativos de estos parámetros. La aplicación práctica de este enfoque de solución, permite la generalización del mismo en los mecanismos de transmisión con engranajes cilíndricos de dientes rectos asimétricos de perfil evolvente trocoide.

Palabras claves: engranaje recto asimétrico, factores geométricos, resistencia a la flexión, CAD/CAE.

Geometric factors for determining the bending strength of asymmetric spur gears with profile teeth involute-trochoid

Abstract

In this paper an analytical method of calculus based on computer analysis of the spur gears graphic model with asymmetric teeth of involute profile and trochoid is proposed, it was estimated form geometry factor and bending strength by a direct calculus method. This procedure is first used to obtain form geometry factor. Furthermore, the factor J foundation for these types of gears was established. The results of this research determinates analytically the maximum bending stress, using the form geometry factor and bending geometry factor, built equations, tables and diagrams representing these parameters. The practical application of this solution approach allows the generalization of it in use in transmission mechanisms of cylindrical spur gears of asymmetric involute trochoid profile.

Key words: asymmetric spur gear, geometry factors, bending strength, CAD/CAE.

Introducción

Una solución viable para mejorar la capacidad portante del engranaje en transmisiones con giro en un solo sentido, es la creación de ruedas dentadas con dientes de perfil asimétrico [1, 2], quienes serán el objeto de estudio de este trabajo. Para utilizar cualquiera de las expresiones analíticas tradicionales en el cálculo de la resistencia a flexión de los dientes de los engranajes asimétricos o simétricos, es imprescindible conocer el factor de Lewis [3] o factor geométrico de forma YF, que origina al factor geométrico de resistencia J al tomar en cuenta la concentración de esfuerzos generados por los cambios de curvatura del perfil en la base del diente.

En los engranajes simétricos estos parámetros se calculan a través de diferentes procedimientos ya normados [4, 5]. Sin embargo, en los estándares actuales no se han establecido procedimientos de estimación para los engranajes de dientes asimétricos. Es notorio el uso del método de elementos finitos en la determinación de los esfuerzos por flexión en la base del diente. Al utilizar este método, es necesario conocer el dominio (modelo CAD) del objeto de estudio.

En las publicaciones, se observan dos tendencias en la creación del dominio, de caras compuestas por las funciones evolvente y trocoide como han establecido [6-9], una de las tendencias se conoce como *Direct Design Gear*, [10-13]. Otra tendencia se basa en la teoría general de la cinemática presente en el proceso de generación del engranaje, [14-16].

En este trabajo, se utiliza el método de generación previamente establecido por los autores [17], quienes efectúan la síntesis del engranaje cilíndrico recto asimétrico, a partir del cálculo y unión de las funciones paramétricas evolvente y trocoide, así como el sector circular de cabeza. También incluyen la distancia angular entre la base de los dientes. Todos estos factores representan el perfil total del diente del engranaje en estudio.

Se presenta como novedad, un método para la determinación del factor geométrico de forma y resistencia, que se basa en la medición directa de la altura crítica, sección crítica, radio de curvatura del perfil de ataque en la posición crítica del diente del engranaje en estudio.

Método de obtención de factores geométricos

Se efectúa la definición de las funciones y variables de los procedimientos de estimación.

Coefficiente de asimetría. El diente asimétrico está compuesto por dos perfiles denominados ataque y respaldo, los cuales se corresponden con los ángulos de presión menor y mayor respectivamente. Los perfiles se relacionan por el coeficiente de asimetría c , (1).

$$c = \text{AngPerfil}_{\text{mayor}} / \text{AngPerfil}_{\text{menor}} = \phi h_r / \phi h_a \quad (1)$$

Evolvente. Es el lugar geométrico del perfil generado por la parte recta de la herramienta de tallado por encima de un radio conocido como radio básico $r_b = r_p \cos(\phi)$ del engranaje. Es una evolvente de circunferencia, cuyas ecuaciones paramétricas están dadas por (2). La función evolvente, está en función del parámetro θ (ángulo entre el origen de la evolvente y un punto de la circunferencia de base).

$$\text{Rev}(\theta) = r_b \sqrt{1 + \theta^2}, \quad \beta_{ev}(\theta) = \theta - \tan^{-1}(\theta) \quad (2)$$

Trocoide. Es el lugar geométrico de los puntos del radio de acuerdo de la cabeza de la herramienta sobre la rueda generada, razón por la cual se considera como parámetro al ángulo ϕ , formado por la recta que une un punto cualquiera del acuerdo de la herramienta y el centro de la circunferencia de acuerdo con su horizontal, además se tienen como variables intervinientes en su generación: r_o radio de salida de trocoide $r_o = r_p + m \left[x - h_{a0} + r_f (1 - \text{Sen}(\phi h_a)) \right]$, r_f radio de finalización de herramienta, r_p radio primitivo, x coeficiente de corrección.

La función trocoide se expresa por las ecuaciones paramétricas (3) y (4).

$$\text{Rtr}(\phi) = \text{Sqrt} \left[\left[r_o - r_f (\text{Sen}\phi - \text{Sen}\phi h) \right]^2 + \left[\frac{r_p - r_o + r_f (\text{Sen}\phi - \text{Sen}\phi h)}{\text{Tan}\phi} \right]^2 \right] \quad (3)$$

$$\beta_{tr}(\varphi) = \tan^{-1} \left[\frac{rp - ro + rf(\text{Sen}\varphi - \text{Sen}\phi h)}{\tan\varphi [ro - rf(\text{Sen}\varphi - \text{Sen}\phi h)]} + \frac{ro \tan\phi h}{rp} - \phi h - \frac{rp - ro - rf \text{Sen}\phi h}{rp \tan\varphi} - \frac{rf \text{Cos}\phi h}{rp} \right] \quad (4)$$

Factor geométrico de resistencia a la flexión YF

Se parte de la propuesta efectuada por [18, 19], para la determinación del factor geométrico de forma YF. A partir de un análisis de los esfuerzos producidos en la base del diente asimétrico (Figura 1), se deduce la ecuación que define al factor geométrico de forma YF, como se indica en (5) para el lado del ataque. Dichos autores incorporan para efectos de cálculo el desarrollo de [20]

$$YF_a = (Sc/m)^2 \text{Cos}(\phi h_a) / \left[(6/m) (\text{Cos}(\phi Ln_a) hcr_a - e \text{Sen}(\phi Ln_a)) \right] \quad (5)$$

Como se observa en la figura 1 y la ecuación (5), el factor geométrico de forma YF para engranajes rectos asimétricos es un índice geométrico, para su cálculo es necesario determinar la sección crítica (Sc) del diente, la altura crítica (hcr_a) y la excentricidad (e), variables que se definen y estiman en esta investigación basándose en la geometría real del diente asimétrico una vez generado (Figura 2).

Descripción de las variables involucradas

Angulo de la carga normal en la punta (φLn_a). Es el ángulo de la dirección de la carga normal respecto a la horizontal en el diente virtual, su expresión mostrada en (6), se consigue por perpendicularidad común de las líneas l₀₁ y l₀₂ con la horizontal y la línea l₂₁ (Figura 2)

$$\phi Ln_a = \tan(\alpha a_a) - \text{inv}\nu_a \quad (6)$$

Altura crítica del lado de ataque (hcr_a). Distancia (7) entre el radio de intersección de la dirección de la carga normal con el radio de la punta del diente r_a^{Ln}, (Figura 2) menos la altura de la sección crítica ys.

$$hcr_a = r_a^{Ln} - ys \quad (7)$$

Sección crítica (Sc). Suma de las secciones medias críticas en el respaldo y ataque (8), (Figura 1).

$$Sc = Sc_a^m + Sc_r^m \quad (8)$$

Excentricidad (e). Representa el brazo de momento de la componente vertical de la carga normal (9). Debido a la asimetría (Figura 1) la componente vertical de la carga normal Ln_v se encuentra desplazada una magnitud e del centro de la sección crítica media Sc^m, lo cual origina esfuerzos de compresión que contrarrestan a los de tracción de la componente horizontal Ln_h.

$$e = Sc_r^m - Sc/2 \quad (9)$$

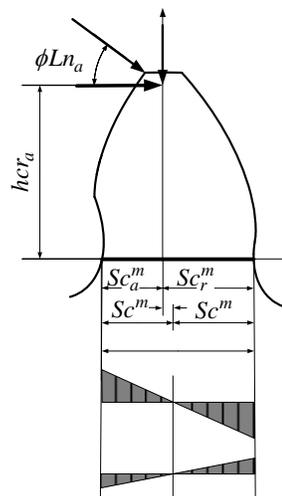


Figura 1. Diagrama de esfuerzos

Radio de la intersección r_i^{Ln} . Es la distancia medida (10) desde el centro de la rueda dentada a la intersección de la dirección de la carga con el eje radial rt de la punta del diente, l_{02} (Figura 2).

$$r_i^{Ln} = r_{b_a} / \cos(\phi_a^{Ln}) \quad (10)$$

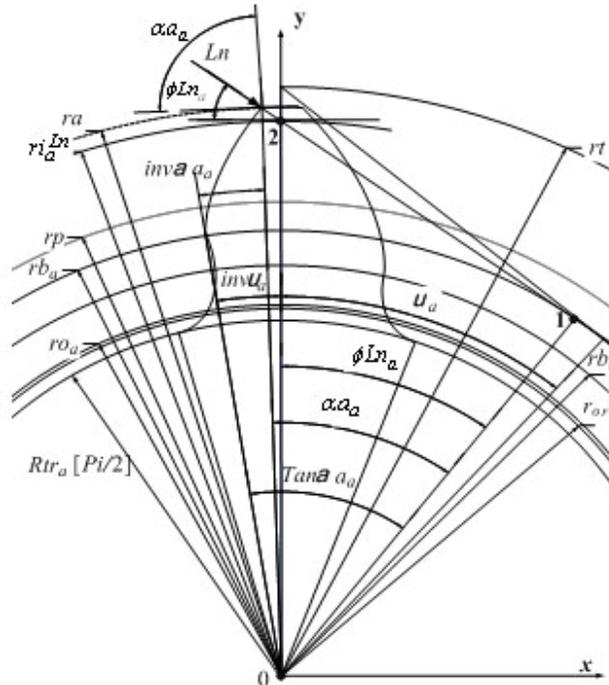


Figura 2. Geometría del diente asimétrico

Procedimiento de estimación del factor geométrico de forma YF

Se usa un modo de cálculo directo (producto de las dimensiones del modelo generado), se utiliza (5) basándose en la estimación sucesiva del espesor crítico Sc y la altura crítica hcr_a de un diente virtual, que se ha particionado en planos horizontales, en la zona limitada por las cotas límites superior yL^S y límite inferior yL^I (Figura 3). Más adelante se procede a definir los límites de las particiones.

Sección crítica media lado de ataque

Se crea una función del valor de la abscisa de la trocoide del ataque (11), definiéndolo como espesor medio crítico en ese lado (12)

$$xsf_a(\varphi_a) = Rtr_a(\varphi_a) \text{Sen}[\text{inv}u_a - \beta tr_a(\varphi_a)] \quad (11)$$

$$Sc_a^m = xsf_a(\varphi_a) \quad (12)$$

Altura de la sección media del perfil de ataque

Se crea una función de altura (13) de la trocoide del ataque en el diente virtual, la altura instantánea (14) es la función de altura para cualquier φ_a .

$$ysf_a(\varphi_a) = Rtr_a(\varphi_a) \text{Cos}[\text{inv}u_a - \beta tr_a(\varphi_a)] \quad (13)$$

$$ys = ysf_a(\varphi_a) \quad (14)$$

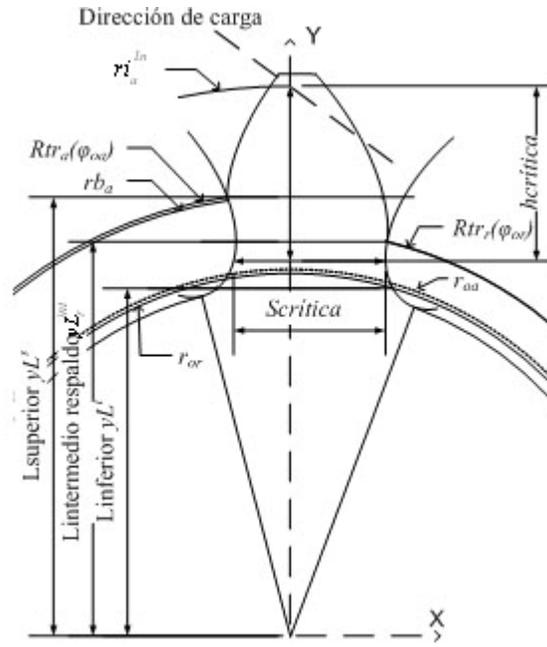


Figura 3. Límites zona de estudio

Sección crítica media del lado de respaldo

Debido a la asimetría, la altura de la sección definida para el lado de ataque, podría estar en la evolvente o en la trocoide del lado de respaldo, por tanto se crean funciones de la abscisa de ese lado para cada función, evolvente (15) y trocoide del respaldo (16).

$$xsf_r^e(\theta_r) = Rev_r(\theta_r) \text{Sen}[\text{inv}\nu_r - \beta ev_r(\theta_r)] \tag{15}$$

$$xsf_r^t(\varphi_r) = Rtr_r(\varphi_r) \text{Sen}[\text{inv}\nu_r - \beta tr_r(\varphi_r)] \tag{16}$$

La sección crítica media (17) será la usada según la función evolvente o trocoide

$$Sc_r^m = xsf_r^e(\theta_r) \cup xsf_r^t(\varphi_r) \tag{17}$$

Altura de la sección media del perfil de respaldo

La altura instantánea se define según su localización, en la evolvente (18) o la trocoide (19) del respaldo

$$ysf_r^e(\theta_r) = Rev_r(\theta_r) \text{Cos}[\text{inv}\nu_r - \beta ev_r(\theta_r)] \tag{18}$$

$$ysf_r^t(\varphi_r) = Rtr_r(\varphi_r) \text{Cos}[\text{inv}\nu_r - \beta tr_r(\varphi_r)] \tag{19}$$

Límite superior yL^s

Es la ordenada (20) en el diente virtual (Figura 3) de la intersección de la evolvente y la trocoide del lado de ataque, en dicho punto los ángulos paramétricos son $\{\theta_{oa}, \varphi_{oa}\}$. Se escoge ya que debido a la asimetría, el radio de la intersección entre la evolvente y la trocoide en el lado de ataque es mayor que en el respaldo, $Rtr_a(\varphi_{oa}) \geq Rtr_r(\varphi_{or})$.

$$yL^s = ysf_a(\varphi_{oa}) \tag{20}$$

Angulo del límite superior en lado de respaldo θL_r^s

El límite superior del respaldo es igual al calculado para el lado del ataque yL^s , basándose en esa afirmación se estima el ángulo del límite superior θ_r de la evolvente del respaldo, mediante la solución de (21) y se asigna

$$a \qquad \qquad \qquad \theta L_r^s \tag{22}$$

$$ysf_r(\theta_r) = yL^s \quad (21)$$

$$\theta_{L_r}^s = \theta_r \quad (22)$$

Límite intermedio del lado de respaldo yL_r^{int}

Es la componente vertical del radio de la intersección de la evolvente con la trocoide del respaldo en los ángulos paramétricos $\{\theta_{o_r}, \phi_{o_r}\}$, la misma determina la ordenada del límite intermedio del respaldo yL_r^{int} (23).

$$yL_r^{int} = ysf_r(\theta_{o_r}) \quad (23)$$

Límite inferior yL^i

Este límite será el inferior del lado de respaldo $yL^i = yL_r^i$ ya que debido a la relación de asimetría siempre $ro_r \leq ro_a$. El límite inferior del lado de respaldo yL_r^i (26), es la altura del radio de salida de la trocoide del respaldo ro_r (24). La solución de la ecuación (25), produce el ángulo ϕ_r^i , el cual se toma como el ángulo $\phi_{L_r}^i$ del límite inferior del respaldo $\phi_{L_r}^i = \phi_r^i$, el que se utiliza para estimar yL_r^i (26), figura 3.

$$ro_r = rp + m\{x - b + rf[1 - \sin(\phi h_r)]\} \quad (24)$$

$$ro_r = Rtr_r(\phi_r^i) \quad (25)$$

$$yL^i = yL_r^i = Rtr_r(\phi_{L_r}^i) \cos[\beta tr_r(\phi_{L_r}^i)] \quad (26)$$

Angulo del límite inferior del ataque $\phi_{L_a}^i$

La solución de la ecuación. (27), produce el ángulo ϕ_a^i (28) de la trocoide del ataque en el punto donde su componente vertical se hace igual a yL^i , dicho ángulo es $\phi_{L_a}^i$.

$$yL^i = Rtr_a(\phi_a^i) \cos[\beta tr_a(\phi_a^i)] \quad (27)$$

$$\phi_{L_a}^i = \phi_a^i \quad (28)$$

Paso ϕ . Una vez definidas las funciones y límites de las zonas de recorrido, se particiona la zona en estudio desde el límite superior al inferior del perfil por el lado de ataque, según ni número de divisiones. La distancia entre las particiones se determina con el incremento de ϕ (29).

$$inc\phi = (\phi_{L_a}^i - \phi_{o_a}) / ni \quad (29)$$

Procedimiento de estimación del factor geométrico de resistencia J

El parámetro geométrico de resistencia a la flexión J, surge como consecuencia del conocimiento de los esfuerzos de tracción en la base del diente, comparados a los esfuerzos nominales calculados sólo con el factor de forma.

Para la obtención del factor J, es necesaria la determinación del factor geométrico de forma YF. En referencia al factor geométrico de resistencia J, para engranajes cilíndricos rectos asimétricos de perfil de evolvente trocoide, no hay bibliografía explícita en cuanto a su determinación analítica. El método de cálculo utilizado es una modificación del modo de determinación de la expresión que aporta AGMA 908-B89 [4], mostrada en (30)

$$J = YFC_{\psi} / Kfm_N \quad (30)$$

Como en este trabajo se consideran los engranajes rectos, entonces el ángulo de hélice es $\psi = 0$, $C_\psi = 1$ y $m_N = 1$, por lo que J será una función de YF y del factor de concentración de esfuerzos Kf a la altura de la sección crítica.

Estimación del concentrador de esfuerzos Kf

Se utiliza el factor de concentración de esfuerzos Kf (31), de los estudios fotoelásticos de [21].

$$K_f = H + (wfc/rfc)^L (wfc/hfc)^M \quad (31)$$

Donde wfc, rfc y hfc son el espesor crítico, radio de curvatura y altura crítica en ese punto de la trocoide del lado del perfil de ataque. Excepto rfc, son valores conocidos, utilizados para la estimación de YF.

Ancho de la sección crítica wfc y altura crítica hfc.

Radio de curvatura crítico

El radio de curvatura crítico rfc se estima con (32), evaluándose para el valor del parámetro φ_{sol} , correspondiente a la posición del arreglo donde el factor de forma YF es mínimo, lo cual permite calcular las derivadas necesarias.

$$rfctr_a = \left[\left(\frac{dYtr_a}{d\varphi_{sol}} \right)^2 + \left(\frac{dXtr_a}{d\varphi_{sol}} \right)^2 \right]^{3/2} \left/ \left| \frac{dXtr_a}{d\varphi_{sol}} \frac{d^2Ytr_a}{d\varphi_{sol}^2} - \frac{d^2Xtr_a}{d\varphi_{sol}^2} \frac{dYtr_a}{d\varphi_{sol}} \right| \right. \quad (32)$$

Parámetros H, L, M.

Según [21], se tienen H, L y M en (33).

$$H = 0.331 - 0.436\phi h_a, \quad L = 0.324 - 0.492\phi h_a, \quad M = 0.261 + 0.545\phi h_a \quad (33)$$

Resultados

Cálculo de factor geométrico de forma YF

Para cada valor $\text{inc}\phi$ (29) se calcula Yfi (5), se almacena y se extrae posteriormente el valor mínimo de los YFi, dicho valor representa la solución YF. Se repite el procedimiento el número de veces requerido por la combinación del número de valores de las variables intervinientes, se muestran a continuación los pasos del procedimiento descrito.

// Definición de funciones y parámetros de referencia

$$\phi L_n_a \text{ (6)}, \quad r_a^{iL_n} \text{ (10)}, \quad xsf_a(\phi_a) \text{ (11)}, \quad ysf_a(\phi_a) \text{ (13)}, \quad ys \text{ (14)}, \quad ysf_r^e(\theta_r) \text{ (18)}, \quad ysf_r^t(\phi_a) \text{ (19)}$$

$$xsf_r^e(\theta_r) \text{ (15)}, \quad xsf_r^t(\phi_r) \text{ (16)}$$

// Límite superior ataque

$$yL^s \text{ (20)}$$

// Respaldo

// thetaLimiteSuperior para el respaldo, encontrar θ_{Lsr} como la raíz en la condición

$$ysf_r(\theta_r) = yL^s \text{ (21)}, \quad \theta_{Lr}^s = \theta_r \text{ (22)}$$

// Limite intermedio, intersección trr con evr

$$yL_r^{int} = ysf_r(\theta_{or}) \text{ (23)}$$

// Limite inferior del respaldo en r para radio de salida en la base del diente r_{0r}

$$r_{or} = Rtr_r(\phi_{ir}) \text{ (25)}, \quad \phi_{Lr}^i = \phi_{ir}, \quad yL_r^i \text{ (26)}$$

// PhiLinfAta Límite inferior del ataque en la condición

$$yL^i = Rtr_a(\phi_{ia}) \text{Cos}[\beta tr_a(\phi_{ia})] \quad (27) \quad \phi_{La}^i = \phi_{ia} \quad (28)$$

```

// Definir paso de Phi, inicio de contador i, paso incremental n
n = entero ; i = 1 ; incφ = (φLai - φ0a) / ni (29)

Hacer para inPhi = φ0a hasta φLa, con paso incPhi
  Scam = xsfa(inφa) (12)   ys = ysfa(inφa) (14)
  // Cálculo Respaldo Scmr de los ángulos θ (evolvente) y φ (evolvente)
  Si ys ≥ y0r entonces
  // encontrar θi como la raíz en la condición
    ysfre(θr) = Revr(θr) Cos[invvr - βevr(θr)] (15)   Scrm = xsfre(θr) (17)
  Sino
  // encontrar φi como la raíz en la condición
    ysfrt(φa) = Rtrr(φr) Cos[invvr - βtrr(φr)] (19)   xsfrt(φr) = Rtrr(φr) Sen[invvr - βtrr(φr)] (16)
    Scrm = xsfrt(φr) (17)
  Fin Si
//Calcular
Sc (8) hcra (7) e (9) YF (5)
// Guardar data necesaria
arregloSc[i] = Sc; arregloys[i] = ys; arregloScmr[i] = Scmr; arregloScma[i] = Scma; arregloYF[i] = YF
arreglohcr[i] = hcra; arregloe[i] = e; arregloφLna[i] = φLa; arregloLriLa[i] = riLa; arregloincPhi[i] = incPhi
imax = i; i++
Fin Hacer

YF = min[arregloYF(i)]

```

En la Figura 4 se indican los valores numéricos obtenidos de YF en función del número de dientes z y coeficiente de asimetría c , para $x=0$, $a=1$, $b=1.25$, $rf=0.25$.

Cálculo de factor geométrico de resistencia J

Efectuados los cálculos de las ecuaciones (32) y (33), se sustituye en (31) y sucesivamente en (30), obteniéndose finalmente los valores de J, que se muestran en la Figura 5. En este caso el módulo $m=1$ y dimensiones normalizadas $a=1$, $b=1.25$, $rf=0.25$.

Adicionalmente se obtuvo las ecuaciones de regresión para obtener los valores del factor geométrico de resistencia a la flexión J para dientes asimétricos de perfil evolvente y trocoide en función del número de dientes y el coeficiente de asimetría. Para ser más preciso en el valor de este factor, se establecieron tres expresiones (34), (35) y (36) de acuerdo al rango de número de dientes $10 \leq z \leq 20$, $21 \leq z \leq 54$, $55 \leq z \leq 135$

Para $10 \leq z \leq 20$ (con $R^2 = 0.997$, confianza de 98.63% y un error absoluto de 0.002271).

$$J = -0.10365 + 0.0230983 c + 0.0571001 c^2 + 0.0303886 z - 0.000633229 z^2 \quad (34)$$

Para $21 \leq z \leq 54$ (con $R^2 = 0.987$, confianza de 98.86% y un error absoluto de 0.007854)

$$J = 0.198554 - 0.09944 c + 0.08864 c^2 + 0.00354674 z - 0.0000300667 z^2 \quad (35)$$

Para $55 \leq z \leq 135$ (con $R^2 = 0.999$, confianza de 99.31% y un error absoluto de 0.006184)

$$J = 0.212511 + 0.105481 c + 0.0409919 c^2 + 0.0012735 z - 4.34743 \times 10^{-6} z^2 \quad (36)$$

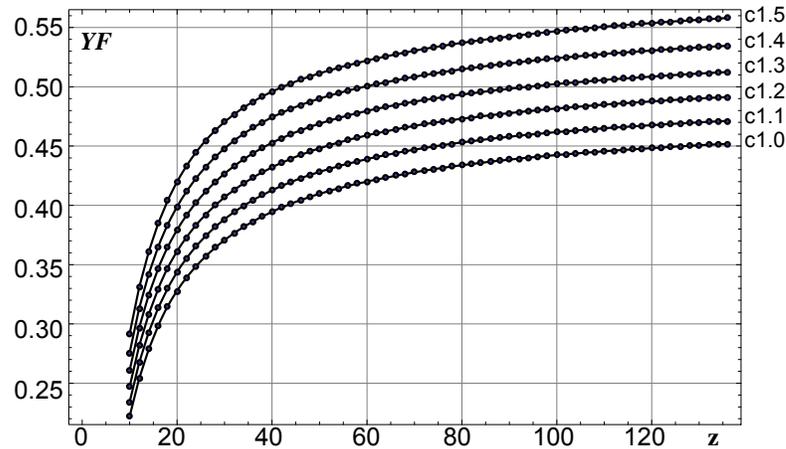


Figura 4. Diagrama factor de forma YF: $f(z,c)$

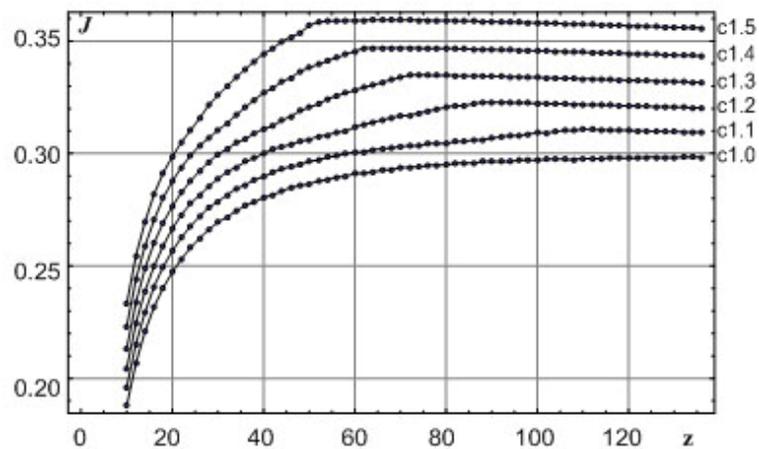


Figura 5. Factor geométrico de resistencia J: $f(z,c)$

Verificación

Una vez establecidos los valores, ecuaciones y modo de obtención del factor geométrico de resistencia J, se procede a verificar los mismos. Los métodos usados son de contraste directo, utilizando valores normados de J y los valores del modelo para el caso de simetría.

Contraste indirecto, usando el método de elementos finitos, se efectuará la síntesis de los dientes para los valores normados de JAGMA, ensayándose posteriormente para iguales condiciones de esfuerzo en la base del diente según los valores resultantes de la carga normal aplicada en la punta del diente, según JModelo y JAGMA. En forma equivalente para resultados según norma ISO. Los modos descritos se refieren a engranajes con dientes simétricos. Respecto a los engranajes asimétricos, la verificación se efectúa mediante un conjunto de ensayos con herramienta CAE (método de elementos finitos), para análisis comparativo frente a los resultados del modelo, sin corrección, con número de dientes $z = \{14, 16, 18, 26, 35, 55, 135\}$ y variación del coeficiente de asimetría $c = \{1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$.

Finalmente se utilizan resultados de investigaciones reconocidas de esfuerzos en la base del diente asimétrico, quienes usan herramientas CAE, comparando directamente con los resultados logrados según el modelo de esta investigación.

Verificación por observación directa de JAGMA vs. JModelo con $c=1$

En la tabla de la norma AGMA 908-B89 p. 30, para perfiles simétricos $c=1$, con igual adendo ($x_1=x_2=0$), ángulo de hélice $\gamma=0$, carga en la punta, factor de profundidad 2.25, radio de finalización de herramienta 0.25, se toman los valores $\{0.24, 0.25, 0.26, 0.28, 0.29\}$ del factor J correspondientes a los números de dientes $z = \{21, 26, 35, 55, 135\}$. Se contrastan los valores JAGMA contra los valores obtenidos JModelo con $c=1$ (Figura 6).

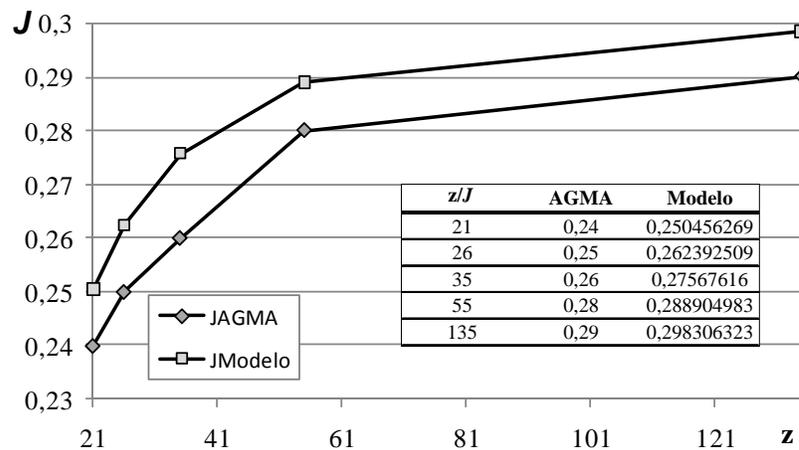


Figura 6. Valores de JAGMA vs. JModelo

Se observa que para igual z , JAGMA es menor que JModelo, en una relación promedio de 4.29%.

Verificación indirecta con herramienta CAE, mediante contraste de esfuerzos de flexión en la base según JModelo y JAGMA contra referencia

Si se establece un valor arbitrario referencial de esfuerzo debido a la flexión en la base del diente y a partir del mismo se calcula la carga normal aplicada en la cabeza L_n , para los valores de J (AGMA y Modelo) y se utilizan posteriormente en un análisis estático lineal con una herramienta CAE (SolidSimulation 2010 ®), el esfuerzo máximo en la sección crítica de la base del diente, debe ser el arbitrario tomado inicialmente. Los resultados de esfuerzo que más se aproximen al inicial arbitrario representan un mejor valor del coeficiente J utilizado.

Se escoge como material de construcción al acero aleado SS, con propiedades de módulo elástico (2.1×10^5 MPa), coeficiente de Poisson (0.29), límite elástico S_Y (723.8 MPa). Se designa el valor medio de S_Y (310.21 MPa) como el esfuerzo de tracción máximo en la base del diente por el lado del ataque, $s = S_Y/2$, b , m y el ángulo ϕL_{n_a} son constantes.

Con los valores de las componentes de la carga normal $L_{n_h} = L_n \cos(\phi L_{n_a}) = s F m J$ y $L_{n_v} = L_{n_h} \tan(\phi L_{n_a})$, se construye la tabla 1, donde se muestran los valores usados y los resultados de los esfuerzos de tracción debido a la flexión en la base del diente del lado del ataque para las fuerzas aplicadas, según JModelo y JAGMA.

Tabla 1. Comparación del modelo con AGMA

Variables	unidad	z				
		21	26	35	55	135
F (ancho cara)	mm	4	4	4	4	4
m (módulo)	mm	1	1	1	1	1
JModelo	-.-	0.251	0.262	0.275	0.289	0.298
JAgma	-.-	0.24	0.25	0.26	0.28	0.29
ϕL_n	ϕ	29.16	27.76	26.10	24.16	21.84
sreferencia ($S_Y/2$)	MPa	310.21	310.21	310.21	310.21	310.21
L_{n_h} Modelo	N	311.45	325.10	341.23	358.60	369.77
L_{n_v} Modelo	N	173.81	171.12	167.19	160.85	148.22
L_{n_h} Agma	N	297.80	310.21	322.62	347.44	359.84
L_{n_v} Agma	N	166.19	163.28	158.07	155.84	144.24
s(MEF)Modelo	MPa	323.11	312.64	306.5	306.2	312.28
s(MEF)Agma	MPa	309.19	298.33	292.5	291.98	302.07

Los estudios efectuados fueron de tipo estático lineales, con malla sólida estándar de alta calidad basada en curvatura, elementos tetraédricos parabólicos, la herramienta utilizada SolidSimulation2010® proporciona el tamaño del elemento promedio ajustado al volumen del dominio, tras diferentes mallados y ejecuciones se escogió un refinamiento entre 80% el tamaño máximo y 33% el mínimo, que ofrece estabilidad en los resultados para los diferentes tamaños del dominio estudiado.

De la tabla 1, el promedio de los esfuerzos máximos por flexión (MEF) son $\bar{\sigma}_{Modelo}=312.15(\text{MPa})$ y $\bar{\sigma}_{AGMA} = 298.81(\text{MPa})$ valores que indican una mejor aproximación relativa a la referencia $S_{V/2}$ con los valores de carga normal estimados con J_{Modelo} (0.624%), respecto a los J_{AGMA} (-3.67%), descripción gráfica en Figura 7.

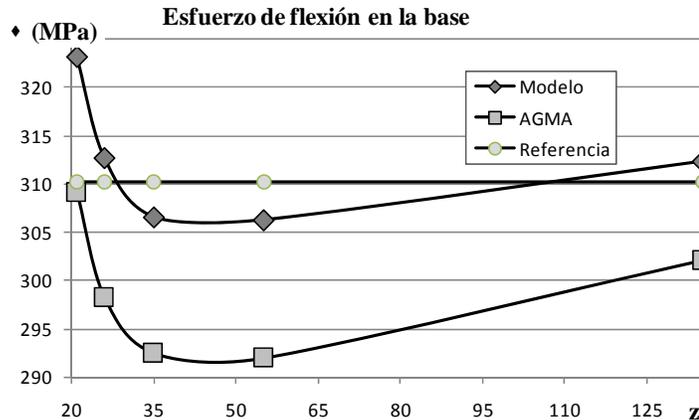


Figura 7. Esfuerzo de flexión en la base, comparación gráfica de modelos

Verificación indirecta con herramienta CAE, mediante contraste de esfuerzos de flexión en la base según ISO y Modelo

Se hace uso de los resultados de σ_{ISO} aportados por [20] en tabla 2, pag. 65, donde los parámetros del engranaje son $\phi_h=20^\circ$, $h_{a0}=1$, $r_f=0.3$, carga lineal normal 200(N/mm), se estima σ_{Modelo} y σ_{MEF} como se muestra para los diferentes casos en la Tabla 2 y Figura 8.

Tabla 2. Comparación del modelo con AGMA

m	z	$\phi_{Ln}(^\circ)$	σ_{ISO} (MPa)	σ_{Modelo} (MPa)	σ_{MEF} (MPa)
2	14	32.38	329.50	347.94	367.62
2	17	30.74	315.70	340.29	342.82
2	20	29.51	307.90	335.43	335.25
2	25	28.00	299.50	330.57	327.19
5	14	32.38	132.90	139.18	142.50
5	17	30.74	127.50	136.12	136.38
5	20	29.51	124.30	134.17	132.56
5	25	28.00	121.50	132.23	126.98
8	14	32.38	83.40	86.98	89.46
8	17	30.74	78.90	85.07	85.90
8	20	29.51	77.90	83.86	83.01
8	25	28.00	76.00	82.64	78.27

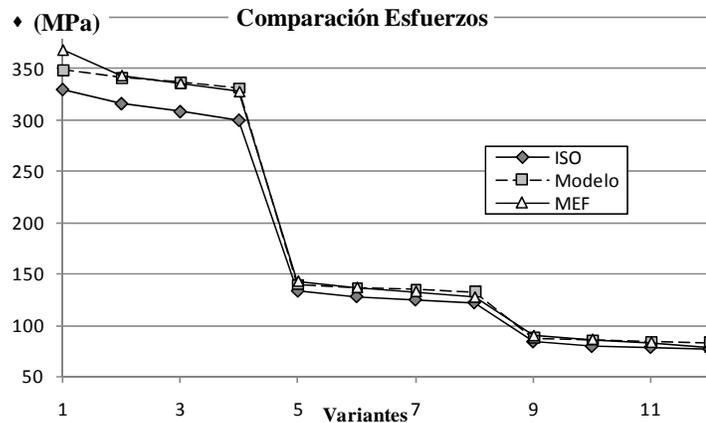


Figura 8. Comparación de esfuerzos, σ según ISO, Modelo, MEF

Se observa en las tres variantes de módulo m : {2, 5, 8} una mejor aproximación de la raíz del error medio cuadrático (REMC) de σ_{modelo} 6.28 MPa frente a σ_{ISO} 18.46 MPa, o en términos absolutos σ_{modelo} (2.82%) y σ_{ISO} 7.14% respecto al esfuerzo estimado con el MEF. Lo cual indica que al utilizar el factor geométrico de resistencia J_{Modelo} se consiguen mejores estimaciones del esfuerzo en la base, al tomar como referencia los resultados del MEF.

Verificación por contraste de esfuerzos de flexión en la base según JModelo y resultado CAE

Se generan los dientes virtuales, para $z = \{14, 16, 18, 26, 35, 55, 135\}$, $x=0.0$, $c = \{1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$, $r_f = 0.25$, $b=1.25$, el espesor (F) y la carga normal en la cabeza por unidad de longitud (Ln) es unitario.

Esta verificación se realiza por comparación de los esfuerzos de tracción debidos a la flexión en la base del diente (1), obtenidos según el modelo propuesto contra los resultados producidos por CAE, los cuales se toman como referencia.

$$\sigma = \text{LnCos}(\phi \text{Ln}) / (FmJ_{\text{Modelo}}) \quad (1)$$

Los resultados del análisis entre los valores del esfuerzo por flexión en la base y los del modelo se indican en la figura 10, el factor de correlación R es de 0.956347 entre σ_{Modelo} y σ_{CAE} , los valores promedio de las desviaciones relativas $\sigma_{\text{Modelo}} - \sigma_{\text{CAE}} / \sigma_{\text{CAE}}$, resultan en -3.93%.

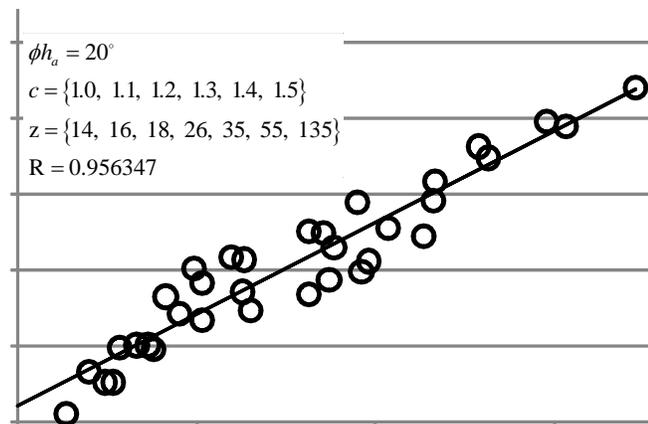


Figura 9. Esfuerzos modelo contra CAE, correlación.

Comparación con resultados en estudios previos de engranajes asimétricos

Caso 1

En [22], tabla 1, pag. 840, el esfuerzo máximo por flexión es $\sigma_{\text{Senthil}}=29.98$ MPa, los parámetros utilizados son $c=1.52$, $z=16$, $m=1$, $\text{Ln}=10\text{N/mm}$, $F=1(\text{mm})$, $x=0.21$, $\phi h_a=20^\circ$. Se utilizan dichos valores como los datos

iniciales en el modelo descrito en este trabajo, se consigue $\sigma_{\text{Modelo}}=29.549(\text{MPa})$. La diferencia relativa a σ_{Senthil} , es -1.44% .

Caso 2

En [23], tabla 1, pag. 44, se toman los resultados $\sigma_{\text{Fetvaci}} \{158.732, 150.332, 144.928\}(\text{MPa})$ para $c\{0.75, 0.9, 1.0\}$, con $z=24, m=2.5, L_n=100 \text{ N/mm}, F=1 \text{ mm}, \phi_{h_a}=20^\circ$. Se utiliza el modelo de este trabajo, calculando el esfuerzo por flexión máximo en la base del diente asimétrico con los parámetros de Fetvaci, resulta $\sigma_{\text{Modelo}} \{150.721, 143.304, 138.803\} \text{ MPa}$.

La diferencia relativa a σ_{Fetvaci} es $\{-5.05, -4.67, -4.23\} \%$, en este caso como se aprecia de los valores del coeficiente de asimetría, el ángulo de presión del perfil de respaldo es menor que el de ataque.

Usos del factor geométrico de resistencia J, disminución de peso y tamaño

Con los resultados de J_{Modelo} , se evalúa el esfuerzo máximo debido a la flexión para los casos considerados, se crea el diagrama mostrado en la figura 10.

A mayor coeficiente de asimetría, el esfuerzo por flexión en la base por el lado del ataque, es menor para igual número de dientes, lo cual evidencia la utilidad que ofrece el aumento de asimetría para transmitir potencia con engranajes de menor número de dientes.

Si se fija como el esfuerzo de flexión máximo, un valor por ejemplo de 3.25 (MPa) , puede observarse en la figura 10 la disminución de z en la medida que aumenta el coeficiente de asimetría c , línea l_{ba} , la relación de dientes entre el punto b ($c=1, z=36$) y el punto a ($c=1.5, z=12$), es $z_b/z_a=36/12=3$.

El diámetro primitivo varía proporcionalmente con z , como la distancia entre centros es la suma de los radios primitivos r_{p1} (piñón) y r_{p2} (rueda), al asumir una relación de transmisión de 1, para las ruedas acopladas con la misma capacidad portante, la transmisión (piñón rueda) puede ser 3 veces m , simplemente al modificar la asimetría de 1 a 1.5 veces.

La consecuencia inmediata es la disminución de volumen y peso en la transmisión.

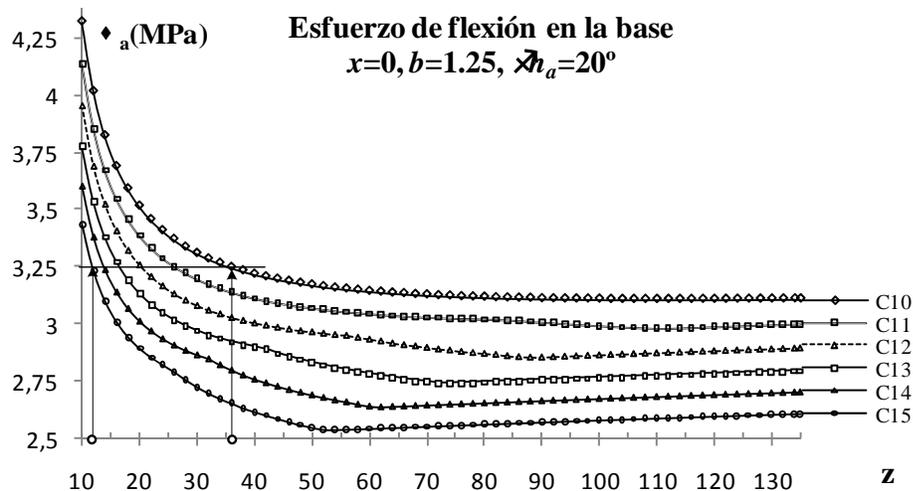


Figura 10. Esfuerzos con módulo, carga y espesor unitarios

Conclusiones

1. Se establece un nuevo procedimiento de estimación de los valores de YF y J para cualquier caso de geometría de engranajes cilíndricos rectos con perfil de evolvente y trocoide asimétricos, basado en la medición directa de las alturas y secciones críticas del diente.
2. Se aportan resultados de YF y J para casos de asimetría entre 1.0 y 1.5 y número de dientes entre 10 y 135, así como ecuaciones aproximadas de fácil utilización del factor geométrico de resistencia J.
3. Existe mejor acercamiento a los esfuerzos de tracción debidos a la flexión en la base del diente de los valores calculados con J_{Modelo} (0.624%) respecto a J_{Agma} (3.67%)

4. En la comparación de resultados entre los esfuerzos estimados según ISO y los del modelo, contra los resultados del MEF, el promedio de la raíz de los errores cuadráticos absolutos es menor para el modelo (2.82%) ante ISO (7.14%), lo cual afirma la buena aproximación del factor geométrico de resistencia J del modelo, utilizado para el cálculo de las cargas en el análisis por el MEF.
5. Los esfuerzos en la base del diente asimétrico determinados con los valores del coeficiente geométrico de resistencia del modelo, presentan una buena correlación ($R=0.9563$) respecto a los obtenidos por el MEF, indica que los mismos son representativos y confiables en las estimaciones analíticas de los esfuerzos a flexión en la base del diente cilíndrico, recto, asimétrico con perfil de evolvente trocoide. Las desviaciones relativas promedio en los casos seleccionados respecto a los resultados con el MEF, son de -3.93%.
6. La raíz del error medio cuadrático REMC, indica una alta aproximación en los resultados del modelo frente a los resultados en la herramienta CAE.
7. En las comparaciones con otros autores, con estudios asimétricos, se consigue una diferencia relativa de los esfuerzos por flexión en la base entre -1.44% y -5.03%, respecto a los resultados de los mismos.
8. Mediante el aumento del coeficiente de asimetría, en igualdad de condiciones de carga normal, se puede reducir el tamaño del engranaje utilizado hasta 3 veces con variación de asimetría $1.0 \leq c \leq 1.5$.
9. Las expresiones de cálculo propuestas para la determinación de las tensiones en el pié del diente de los engranajes asimétricos, teniendo en cuenta el factor geométrico de resistencia a la flexión, ofrecen resultados confiables, reproducibles y contrastables.

Referencias

1. Litvin, F. L., Lian, Q., *et al.* "Asymmetric modified gear drives: reduction of noise localization of contact simulation of meshing and stress analysis". *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 2000, vol. 188, nº 1-3, p. 363-390. ISSN 004547825. DOI 10.1016/S0045-7825(99)00161-9
2. Kapelevich, A. L. y Kleiss, R. E. "Direct gear design for spur and helical involute gears". *Gear Technology*. 2002, vol. 9-10, p. 29-35. ISSN 07436858.
3. Lewis, W. "Investigation of strenght of gear teeth". *Proceedings of the Engineers*. vol. 10, nº 1, p. 16-23. Disponible en: <http://www2.hsp.org/collections/manuscripts/e/ECP3144.html>
4. AGMA. *Information sheet, geometry factors for determining the pitting resistance and bending strength of spur, helical and herringbone gear teeth*. AGMA 908-B89, 1989. ISBN 1555895255.
5. ISO. Calculation of load capacity of spur and helical gears-Part 3: Calculation of tooth bending strength. ISO 6336-3, 1996.
6. Buckingham, E. "Trochoids, Tooth Fillets, and Undercut/The Involute Curve and Its Properties/Involutometry of Spur Gears". En: *Analytical Mechanics of Gears*. Paperback ed. New York: Dover Publications Inc., ISBN 048661073X.
7. Spotts, M. F. "Cálculos especiales para engranes rectos y helicoidales". En: *Manual de engranajes: diseño, manufactura y aplicación de engranajes*. 1ra ed. México: Continental, 1973, p. 247-264.
8. Fuentes Aznar, A. "Modelo de cálculo a flexión de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente". Tesis Doctoral, Departamento de Mecánica. Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid, España. 1995.
9. Hernández, O. D. "Método para el diseño de engranes cilíndricos con dientes rectos de perfil de evolvente basado en el indicador del grado de socavado". Tesis Doctoral, Centro de Estudios CAD/CAM. Universidad de Holguín. Holguín, Cuba. 2006.
10. Kapelevich, A. y Shekhtman, Y. V. "Direct gear design: bending stress minimization". *Gear Technology*. 2003, vol. 9-10, p. 44-47. ISSN 07436858.
11. Gang, D. y Tsutomu, N. "Bending capacity enhancement using an asymmetric tooth profile". *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*. 2003, vol. 69, nº 679, p. 737-742. ISSN 03875024. DOI: 10.1299/jsmec.46.1171
12. Muni, D. V., Kumar, V. S., *et al.* "Optimization of asymmetric spur gear drives for maximum bending strength using direct gear design method". *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2007,

- vol. 35, nº 2, p. 127-145. ISSN 15397734.
DOI: 10.1080/15397730701196637
13. Chira, F., Tisan, V., *et al.* "Modelling of the asymmetric gears using applications in matlab and autolisp". *Annals of the Oradea University. Fascicle of Management and Technological Engineering*. 2007, vol. 6, nº 16, p. 1366-1371. ISSN 1583-0691.
 14. Cavdar, K., Karpat, F., *et al.* "Computer aided analysis of bending strength of involute spur gears with asymmetric profile". *Journal of Mechanical Design*. 2005, vol. 127, nº 3, p. 477-484. ISSN 10500472. DOI: 10.1115/1.1866158
 15. Yang, S. C. "Mathematical model of a helical gear with asymmetric involute teeth and its analysis". *Springer International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2005, vol. 26, nº 5-6, p. 448-456. ISSN 02683768. DOI 10.1007/s00170-003-2033-z
 16. Cárdenas, O. J., Hernández, O. D., *et al.* "Generación de ruedas dentadas asimétricas de perfil evolvente trocoide". En: *15 Convención Científica de Ingeniería y Arquitectura. Seminario Euro Latinoamericano de Sistemas de Ingeniería*. La Habana, Cuba. 2010.
 17. Moya Rodríguez, J. L., Velázquez Pérez, J. A., *et al.* "Determinación del factor de forma para engranajes de dientes rectos asimétricos". En: *Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica*. Cuzco, Perú. 2007.
 18. Moya, J. L., Machado, A. S., *et al.* "A Study in Asymmetric Plastic Spur Gears". *Gear Solutions magazine*. 2010, vol. 8, nº 84, p. 34-41. ISSN 19337507.
 19. González Rey, G., Frechilla Fernández, P., *et al.* "El método de elementos finitos como alternativa en el cálculo de engranajes". *Ingeniería Mecánica*. 2002, vol. 5, nº 1, p. 55-67. ISSN 1029516X.
 20. Dolan, T. J., Edward, L. "A photoelastic study of stresses in gear tooth fillets". *Engineering Experiment Station*. 1942, vol. 31, nº 335, p. 44. Disponible en: <http://hdl.handle.net/2142/4522> .
 21. Senthil Kumar, V., Muni, D. V., *et al.* "Optimization of asymmetric spur gear drives to improve the bending load capacity". *Mechanism and Machine Theory*. 2008, vol. 43, nº 7, p. 829-858. ISSN 0094-114X. DOI 10.1016/j.mechmachtheory.2007.06.006
 22. Fetvaci, C. y Imrak, E. "Mathematical model of a spur gear with asymmetric involute teeth and its cutting simulation". *Group Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2008, vol. 35, nº 3, p. 34-46. ISSN 15397734. DOI 10.1080/15397730701735731

Javier Antonio Cárdenas-Oliveros^I, Jorge Laureano Moya-Rodríguez^{II}, Daniel R. Hernández-Ochoa^{III}

I. Universidad Politécnica Territorial de Aragua. Dpto. de Mecánica. Venezuela

E-mail: tariba2006@gmail.com

II. Universidad Central de Las Villas. Facultad de Ingeniería Mecánica. Cuba

E-mail: jorgemr@uclv.edu.cu

III. Universidad de Holguín. Facultad de Ingeniería. Cuba

E-mail: daniel@cadcam.uho.edu.cu