

El método de elementos finitos como alternativa en el cálculo de engranajes.

G. González Rey*, P. Frechilla Fernández, R. José García Martín**.**

*Instituto Superior Politécnico *José Antonio Echeverría* (ISPJAE).
Facultad de Ingeniería Mecánica. Departamento de Mecánica Aplicada
Calle 116 s/n, CUJAE, Marianao 15, Ciudad de la Habana, Cuba.
Teléfono: (537)-202267, Fax: (537)-277129
E-mail: cidim@mecanica.ispjae.edu.cu

**Universidad de Salamanca Escuela Politécnica Superior de Zamora.
Departamento de Ingeniería Mecánica y Civil
Ave. Requejos 33, Zamora. España.
E-mail: pf2@usal.es.
E-mail: toles@usal.es

(Recibido el 2 de Noviembre del 2001, aceptado el 10 de Diciembre del 2001).

Resumen.

A pesar de que la optimización y el diseño racional de los engranajes han sido temas de muchas investigaciones, aún siguen siendo del interés de muchos especialistas y estudiosos de los engranajes. Las razones fundamentales para este hecho están condicionadas en primer lugar a que el diseño de un engranaje es en extremo complejo debido al número de variables, limitaciones y relaciones que involucra, y por otro lado existe la particularidad de que para cada caso de optimización la función objetivo, las restricciones y las variables independientes son generalmente diferentes. En los últimos años los nuevos sistemas de computación para auxiliar al diseño (CAD) han sido empleados como alternativas para el cálculo de los engranajes, pero la variedad de sistemas y las amplias posibilidades de generación de modelos matemáticos empleados en la evaluación de esfuerzos y deformaciones requieren de una validación de sus resultados a partir de cotejarlos con los procedimientos y normas establecidos por la práctica y la experiencia de años. Es conocido que los resultados de los nuevos sistemas CAD con implementación del método de elementos finitos son generalmente muy dependientes de la forma de generación de los modelos de piezas y conjuntos diseñados por complicados procedimientos, que son tratados cuál una caja negra por los proveedores de estos potentes programas y sistemas en el mercado de la informática. En este sentido, el presente trabajo pretende contrastar los esfuerzos obtenidos mediante el empleo de dos de los más potentes sistemas CAD dirigidos a la aplicación del método de los elementos finitos, como son el *Solid Edge* y el *Cosmo Edge*, con los procedimientos de cálculo derivados de las vigentes normas ISO para evaluar la capacidad de carga de los engranajes cilíndricos. En el trabajo se exponen las bases del método de generación del perfil de los dientes de un engranaje cilíndrico de dientes rectos, un algoritmo de cálculo de los esfuerzos en la base del diente y la comparación de los resultados obtenidos por uno y otro método.

Palabras claves: engranaje, esfuerzos de flexión, normas ISO, elementos finitos, *Solid-Cosmos Edge*, CAD.

1. Introducción.

Durante las primeras dos décadas del pasado siglo, el cálculo de transmisiones por engranajes consistía, esencialmente, en la búsqueda de una combinación de número de dientes y módulo, que proporcionara la relación de transmisión deseada y la suficiente resistencia de sus dientes mediante tablas confeccionadas a tal efecto [1]. Como podrá suponerse, los diseños eran bastantes conservadores y basados fundamentalmente en transmisiones que habían

mostrado suficiente capacidad de trabajo. Posteriormente, entre 1925 y 1950, los trabajos en la normalización geométrica y cálculo de la capacidad de carga permitieron establecer las verdaderas bases para el diseño racional de los engranajes.

Desde sus inicios, el desarrollo de las computadoras electrónicas ha influido en gran medida en los procedimientos de cálculo empleados en los engranajes. El advenimiento de las computadoras electrónicas, propició que diferentes programas de computación [2] basados en normas y procedimientos establecidos

prácticamente, sustituyeran las tablas y reglas de cálculo empleadas en el diseño de los engranajes durante años, permitiendo un sustancial aumento de la rapidez y precisión de los cálculos.

A pesar de ello, la relativa poca velocidad de los procesadores matemáticos (véase tabla 1), el auge de nuevos métodos de optimización (*Simplex*, Programación Dinámica, etc.) y las numerosas combinaciones de variables que involucra el cálculo de

los engranajes, no permitían ver los complejos procedimientos basados en cálculos numéricos como técnicas efectivas en la determinación del engranaje óptimo. Durante las décadas comprendidas entre los años 50 y 60, muchos de los procedimientos para la optimización de los engranajes empleaban como base el método de la primera derivada de la función objetivo [3,4].

Tabla 1.- Miniaturización y velocidad de cálculo de las computadoras entre 1945 y 1965 [5].

Año	Tecnología	Componentes por m ³	Velocidad de cálculo Hz
1947	Válvulas de vacío grandes	8 600	3 500
1953	Válvulas de vacío pequeñas	54 000	17 000
1960	Transistores	400 000	229 000
1964	Transistores miniaturizados lógicos	800 000	2 500 000

En las décadas comprendidas entre 1970 y 1990, el análisis de algunas publicaciones dirigidas al cálculo de los engranajes, como las realizadas por Dana (1969) [6], Escanaverino (1984) [7] y Ruiz (1987) [8] nos permite reconocer que el método de búsqueda exhaustiva comienza a ser empleado en la optimización del cálculo de los engranajes. También en esta época, otros investigadores realizan la búsqueda del diseño óptimo de los engranajes empleando otros procedimientos teóricos como el conocido método de la primera derivada de la función objetivo [9] o utilizando vías prácticas mediante ensayos fotoelásticos y electromagnéticos [10].

En la década del 90, la introducción de poderosos medios de cómputos con elevadas velocidades de cálculo (véase figura 1), permite una consolidación del empleo de las nuevas técnicas de análisis numérico como el método de los elementos finitos y las técnicas

de búsqueda exhaustiva, como lo demuestran los trabajos de López (1993) [11], Fuentes (1993) [12], González-Rey (1995) [13], Tennyson (1994) [14] y Sfakiotakis (2001) [15]. El auge alcanzado por las técnicas de computación y el empleo de las nuevas computadoras con procesadores matemáticos cada vez más veloces, posibilitan incluir las nuevas técnicas CAD como nuevas y efectivas herramientas de diseño. Por tal motivo, y con el interés de difundir la perspectivas del *Solid Edge* y el *Cosmos Edge* en la evaluación de engranajes y realizar una validación de sus resultados, son mostrados en este trabajo las bases de un procedimiento de generación del perfil del de los dientes, la construcción en 3D de la rueda dentada, un algoritmo para el cálculo de los esfuerzos de flexión en la base del diente según ISO 6336-3 y la comparación de resultados en 12 casos de análisis de engranajes cilíndricos de dientes rectos

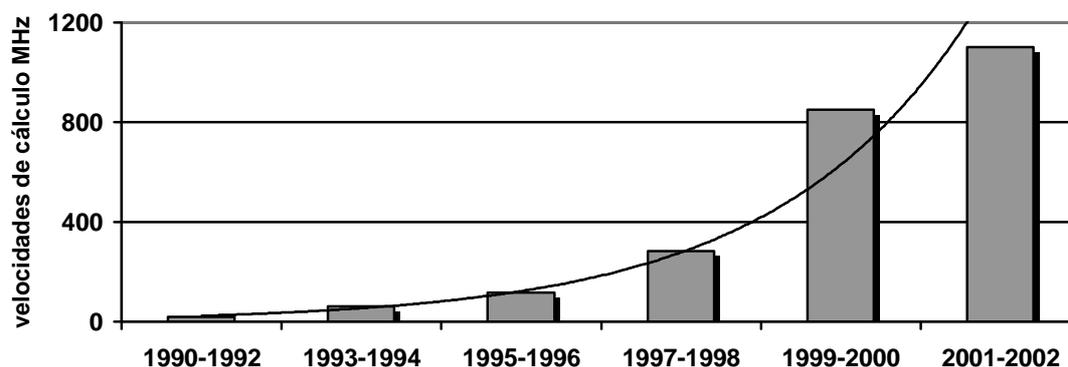


Fig. 1. Velocidad promedio de cálculo de las actuales computadoras personales.

2. Conceptos generales del *Solid edge* y el *Cosmos edge*.

Solid Edge es un sistema de diseño asistido por computadora (CAD) para el modelado de conjuntos y piezas mecánicas y la producción de dibujos. *Solid Edge* ha sido diseñado para incrementar el rendimiento del programa con una interfaz de mayor productividad para el usuario, que impulsa la productividad esencial para el usuario de CAD al capturar las intenciones de diseño de modelado de sólidos mediante los conceptos de lógica de deducción y gestión de decisiones.

Para que los comandos necesarios resulten más accesibles, *Solid Edge* dispone de entornos separados para crear piezas, construir conjuntos y producir dibujos. En particular, en el trabajo fue empleado el entorno *Pieza*. El entorno de modelado de piezas permite construir modelos sólidos tridimensionales con características reales, comenzando con una operación base, como un bloque o cilindro, que se construye con operaciones de pieza para crear un modelo de pieza. Las operaciones del entorno *Pieza* incluyen, entre otras, protrusiones y vaciados, agujeros, refuerzos, sólidos con espesor, redondeos, ángulos de desmoldeo y chaflanes. También puede construir patrones de operaciones circulares y rectangulares y copias simétricas. Particularmente el patrón de copias simétricas y de operaciones circulares es muy útil para la generación de los sólidos copias de los dientes y las ruedas.

Las versiones avanzadas, en particular la versión 10 empleada en el presente trabajo, permite una rápida exportación de los resultados de la generación del sólido a su contraparte el programa *Cosmo Edge* para el estudio de la resistencia y las deformaciones con empleo del método de los elementos finitos.

Como antes fue mencionado, el programa *Cosmos Edge* está conectado de forma continua con el programa de diseño *Solid Edge* y es un paquete de software para el análisis de un diseño realizado con el *Solid Edge*. Con este programa es posible analizar piezas y conjuntos diseñados con *Solid Edge*, evaluar sus diseños y sus características bajo diferentes escenarios de trabajo y hacer las modificaciones necesarias en un entorno sencillo. Las capacidades básicas del *Cosmos Edge* son el análisis lineal de tensiones, el cálculo de frecuencias naturales, la estimación crítica de las cargas de pandeo y el estudio de la transmisión de calor.

3. Geometría básica de los engranajes cilíndricos.

Del estudio de la geometría y cinemática de los engranajes, puede afirmarse que existe un grupo de parámetros geométricos, que una vez conocidos,

permite la realización del cálculo completo de la geometría de las ruedas dentadas. Ellos son:

z : Número de dientes.

m : Módulo normal.

β : Ángulo de la hélice en el cilindro de referencia.

b : Ancho del diente.

x : Coeficiente de corrección del diente.

α : Ángulo del perfil de la cremallera de referencia.

c^* : Factor de holgura radial (c / m).

h_a^* : Factor de altura de cabeza (h_a / m).

Para conservar la constancia de la relación de transmisión cinemática en el engranaje los dientes del piñón y la rueda deben tener los perfiles conjugados, es decir que: *La normal común a los perfiles en contacto divide a la distancia entre centros en dos segmentos inversamente proporcionales a las velocidades angulares de las ruedas*. Esta condición de contacto de los dientes entre el piñón y la rueda se observa si ellos engranan correctamente con la cremallera de referencia. Los parámetros del perfil de la cremallera de referencia pueden ser determinados de aquellos perfiles básicos más difundidos y normados.

Una de las formas más difundidas de altura y ángulo de flanco de los dientes del perfil de referencia en las cremalleras básicas corresponde a: $\alpha = 20^\circ$, $h_a^* = 1$ y $c^* = 0,25$, aceptada en la norma japonesa JIS B 1701-72, la norma polaca PN-78/m-88503, la norma soviética GOST 13755-68, la estadounidense AGMA 201.02-68 y la norma internacional ISO 57-74.

Actualmente en varias de las normas relativas a engranajes, editadas por diferentes países, existe una marcada coincidencia en los valores de módulo recomendados en la primera serie de preferencia. Con mas frecuencia son empleados los módulos recomendados en la norma ISO 54-77: 1 ; 1,25 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 16 ; 20 ; 25 mm.

A continuación se exponen las fórmulas principales para el cálculo geométrico de las ruedas con dientes rectos conociendo sus parámetros fundamentales. En las siguientes fórmulas son empleados los subíndices 1 y 2 para el piñón y la rueda respectivamente.

Diámetro de referencia:

$$d = m \cdot z$$

Diámetro de fondo:

$$d_f = d - 2 \cdot m \cdot \left(h_a^* + c^* - x \right)$$

Diámetro básico:

$$d_b = d \cdot \cos \alpha$$

Diámetro de cresta:

$$d_{a_{1,2}} = 2 \cdot a_w - d_{f_{2,1}} - 2 \cdot c^* \cdot m$$

Altura del pie del diente:

$$h_f = m \cdot (h_a^* - c^* - x)$$

Altura de cabeza del diente:

$$h_a = 0,5 \cdot [d_a - d]$$

Altura del diente:

$$h = h_f + h_a$$

Espesor normal del diente en el cilindro de referencia:

$$s_n = m \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot x \cdot \tan \alpha \right)$$

Anteriormente fueron brindadas algunas de las fórmulas básicas para el cálculo de la geometría de una rueda cilíndrica de dientes rectos, pero al ser engranadas dos ruedas surgen otros parámetros importantes que permiten valoraciones importantes de su montaje y funcionamiento. A continuación son relacionadas las principales fórmulas para el cálculo geométrico de un engranaje cilíndrico de ejes paralelos, dientes rectos y contacto exterior.

Razón de engrane:

$$u = \frac{z_2}{z_1}$$

Distancia interaxial:

$$a_w = \frac{m \cdot [z_1 + z_2]}{2} \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} \right)$$

Ángulo de engranaje en el plano transversal:

$$\alpha_w = \cos^{-1} \left(\frac{d_{b1} + d_{b2}}{2 \cdot a_w} \right)$$

Corrección sumaria:

$$x_\Sigma = x_1 + x_2 = \frac{[\text{inv} \alpha_w - \text{inv} \alpha_t]}{2 \cdot \tan \alpha} \cdot [z_1 + z_2]$$

Coefficiente de recubrimiento:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{0,5 \cdot \left[\sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} + \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} \right] - a_w \cdot \sin \alpha_w}{m \cdot \pi \cdot \cos \alpha}$$

4. Ecuaciones paramétricas del flanco de los dientes.

La curva de evolvente, aquella generada por el punto de una recta que se mueve con rodadura pura sobre una circunferencia básica, es la empleada por excelencia en los flancos conjugados de los dientes engranados en las ruedas dentadas. Así mismo se conoce, que la curva de trocoide corresponde con el perfil del diente por debajo de la circunferencia básica de la rueda dentada y esta curva es generada por un punto en un círculo que se mueve con rodadura pura sobre una recta.

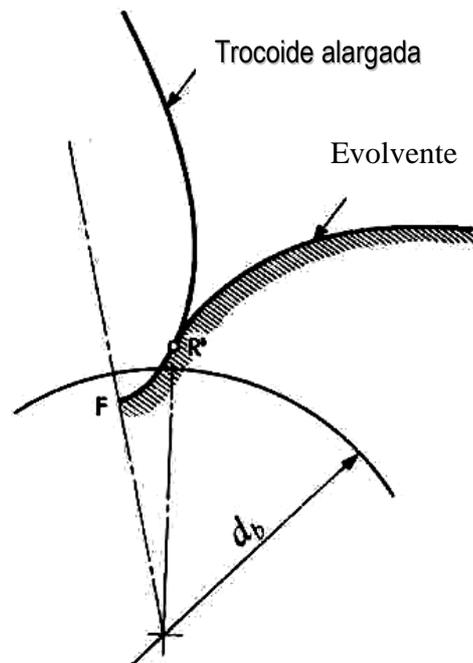


Fig. 2. Curvas asociadas al perfil activo de los dientes de engranajes cilíndricos.

Un estudio de las relaciones matemáticas de la geometría de estas curvas permite determinar las ecuaciones paramétricas que las define en un eje de coordenadas [16].

Coordenadas de la curva de evolvente:

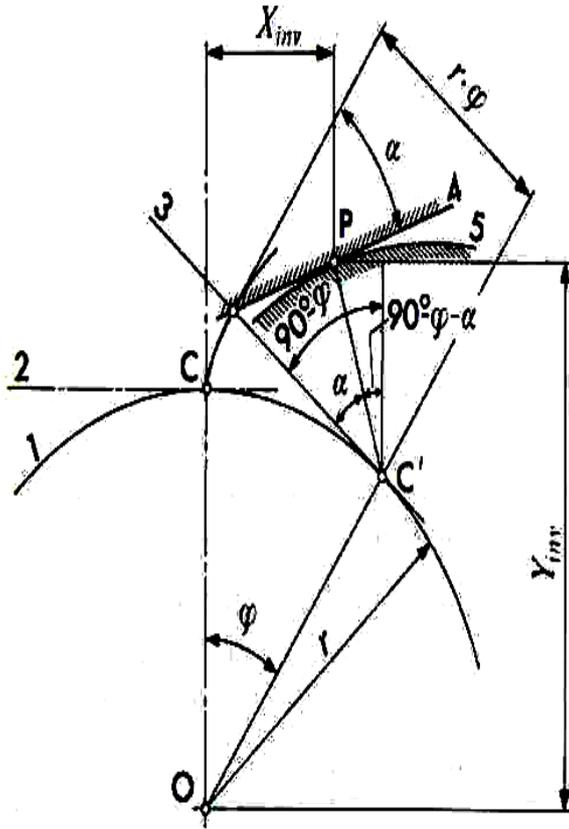


Fig. 3. Coordenadas de la curva de evolvente en el perfil del diente recto de un engranaje cilíndrico.

Un análisis de las proporciones y relaciones geométricas de la curva de evolvente permite definir las ecuaciones paramétricas del perfil activo del diente del engranaje basado en la curva de evolvente con dependencia del ángulo de giro de la recta sobre el cilindro básico (φ), el ángulo de generación de la herramienta (α) y el diámetro del cilindro básico (d_b).

Las mencionadas relaciones son mostradas a continuación:

$$X_{inv} = 0,5 \cdot d_b \cdot [\text{sen}(\varphi) - \varphi \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\alpha + \varphi)]$$

$$Y_{inv} = 0,5 \cdot d_b \cdot [\cos(\varphi) + \varphi \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\alpha + \varphi)]$$

Coordenadas de la curva de trocoide:

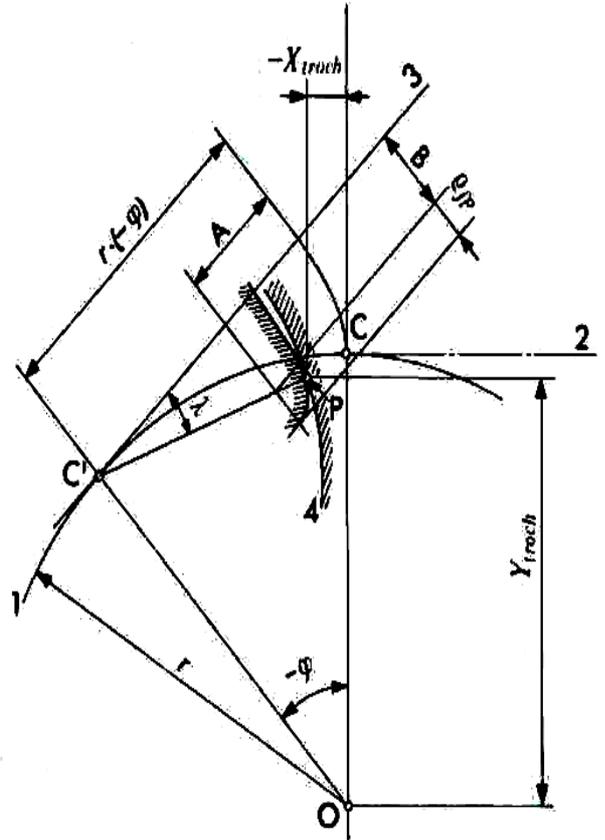


Fig. 4. Coordenadas de la curva de trocoide en el perfil del diente recto de un engranaje cilíndrico.

Un análisis semejante al realizado con la curva de evolvente puede ser realizado con la parte del flanco del diente correspondiente con la curva de trocoide. Las fórmulas paramétricas son mostrada a continuación:

$$X_{troch} = 0,5 \cdot \text{sen}(\varphi) + \left(\frac{-0,5 \cdot d_b \cdot \varphi - A}{\cos(\lambda)} + \rho_f \right) \cdot \cos(\varphi + \lambda)$$

$$Y_{troch} = 0,5 \cdot \cos(\varphi) - \left(\frac{-0,5 \cdot d_b \cdot \varphi - A}{\cos(\lambda)} + \rho_f \right) \cdot \text{sen}(\varphi + \lambda)$$

Donde:

$$\lambda = \tan^{-1} \left(\frac{B}{-0,5 \cdot \varphi - A} \right)$$

$$A = (h_a + c - x \cdot m) \cdot \tan(\alpha) + \rho_f \cdot \frac{1 - \text{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

$$B = h_a + c - x \cdot m - \rho_f$$

El trazado de los puntos de la curva que conforman el perfil de los dientes se logra dándole valores al ángulo de giro φ y teniendo en consideración que las ecuaciones paramétricas de la curva de evolvente son evaluadas mientras $\varphi \geq \frac{A}{0.5 \cdot d_b}$. En caso contrario, de no cumplirse la última relación, el flanco del diente corresponde con una curva de trocoide.

1. Condiciones de aplicación de la carga en el diente y los esfuerzos en la base del diente según la norma ISO 6336.

El cálculo de los esfuerzos en la base del diente, según ISO 6336 en su variante A, toma como modelo de referencia la semejanza existente entre una barra prismática con carga en voladizo y un diente con la carga aplicada en la cresta. Este modelo ha permitido desarrollar las ecuaciones necesarias para evaluar los esfuerzos que surgen en la raíz del diente y están

asociados con la fractura que puede ser producida en la base del diente.

Del análisis del modelo de referencia pueden ser obtenidas las ecuaciones de los diferentes tipos de esfuerzos que actúan en la raíz del diente.

Esfuerzo normal por flexión:

$$\sigma_F = \frac{F_n \cdot \cos(\alpha_{Fan}) \cdot h_{Fa}}{s_{fn}^2 \cdot b} \quad (\text{MPa})$$

Esfuerzo normal por compresión:

$$\sigma_C = \frac{F_n \cdot \sin(\alpha_{Fan})}{s_{fn} \cdot b} \quad (\text{MPa})$$

Esfuerzo tangencial por cortante:

$$\tau = \frac{F_n \cdot \cos(\alpha_{Fan})}{s_{fn} \cdot b} \quad (\text{MPa})$$

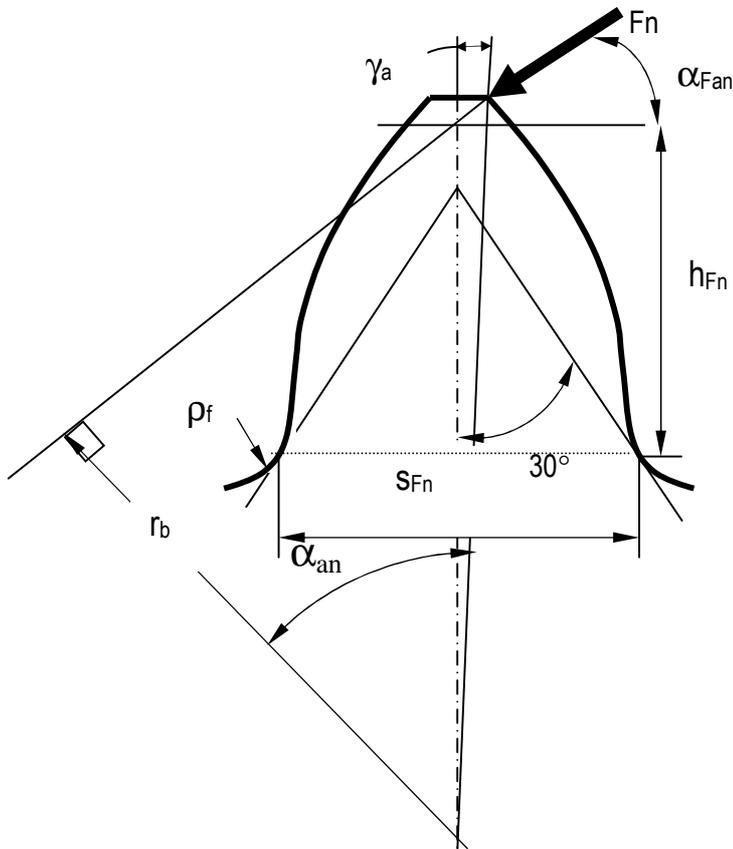


Fig. 5. Modelo de referencia en el cálculo de los esfuerzos en la base del diente con carga aplicada en la cresta.

De estos tres esfuerzos, el más significativo por su magnitud es el correspondiente al esfuerzo por flexión, por tal motivo, y para simplificar el análisis del esfuerzo resultante en la base del diente, generalmente son despreciados los esfuerzos por compresión y por cortante en el cálculo del esfuerzo en la raíz del diente (este procedimiento es el seguido en la norma ISO 6336). De tal forma que la ecuación básica para determinar los esfuerzos de flexión en la base del diente es:

$$\sigma_F = \frac{F_n \cdot \cos(\alpha_{Fan}) \cdot h_{Fa}}{\frac{s_{fn}^2 \cdot b}{6}} \text{ (MPa)}$$

Siendo:

F_n : Fuerza normal (N). Es considerada toda la fuerza actuando en un solo par y aplicada en la cresta del diente analizado.

α_{Fan} : Angulo de incidencia de la fuerza normal cuando actúa la carga en la cresta.

h_{Fa} : Altura desde la zona critica por rotura en la raíz del diente hasta el punto de intersección de la línea de acción de la fuerza normal y el eje de simetría del diente (mm).

s_{fn} : Espesor cordal en la zona critica del diente por rotura de su base (mm).

b : Ancho del diente en la base (mm).

Conociendo la dependencia entre la fuerza normal y su componente tangencial, y empleando valores relativos al módulo del espesor y de la altura, para generalizar el cálculo es posible obtener la siguiente fórmula para el cálculo del esfuerzo básico en la raíz por flexión del diente:

$$\sigma_F = \frac{F_t}{b \cdot m} \cdot \left[\frac{6 \cdot \frac{h_{Fa}}{m} \cdot \cos(\alpha_{Fan})}{\left(\frac{s_{fn}}{m}\right)^2 \cdot \cos(\alpha)} \right] \text{ (MPa)}$$

Por definición, la relación entre corchetes se reconoce como el Factor de Forma y se identifica como Y_{Fa} . Adicionalmente se introducen, para el cálculo del esfuerzo por flexión, otros factores que consideran la influencia de concentradores de tensión en la base del diente, la distribución irregular de la carga en el engrane y la inclinación de los dientes, entre otros aspectos.

La inclusión de estos factores, como coeficientes teóricos y prácticos, hace posible la obtención de una ecuación básica para el cálculo de los esfuerzos de flexión mucho más ajustada a la condición de carga verdadera, permitiendo que su aplicación al cálculo de los engranajes cilíndricos sea un reflejo más fiel de la realidad.

Sustituyendo en la ecuación básica de los esfuerzos de flexión los referidos factores, y luego de realizar las agrupaciones necesarias, son obtenidas las siguientes ecuaciones para el cálculo de los esfuerzos actuantes en la base de los dientes del piñón (σ_{F1}) y la rueda (σ_{F2}) :

Para el piñón:

$$\sigma_{F1} = \frac{F_t}{b_1 \cdot m} \cdot Y_{Fa1} \cdot Y_{sa1} \cdot Y_\epsilon \cdot Y_\beta \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha} \text{ (MPa)}$$

Para la rueda:

$$\sigma_{F2} = \frac{F_t}{b_2 \cdot m} \cdot Y_{Fa2} \cdot Y_{sa2} \cdot Y_\epsilon \cdot Y_\beta \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha} \text{ (MPa)}$$

Donde:

F_t : Fuerza tangencial (N).

b_1 : Ancho del diente del piñón (mm).

b_2 : Ancho del diente de la rueda (mm).

m : Módulo del engranaje (mm).

Y_ϵ : Factor por razón de contacto.

Y_β : Factor por ángulo de la hélice.

Y_{Fa1} : Factor de forma de los dientes del piñón.

Y_{Fa2} : Factor de forma de los dientes de la rueda.

Y_{sa1} : Factor de concentración de tensiones de los dientes del piñón.

Y_{sa2} : Factor de concentración de tensiones de los dientes de la rueda.

K_A : Factor por aplicación de carga.

K_V : Factor por carga dinámica interna.

$K_{F\beta}$: Factor de carga en el flanco del diente.

$K_{F\alpha}$: Factor de carga transversal.

Con el objetivo de validar los resultados de los esfuerzos en la base del diente con empleo del sistema *Solid Edge* y *Cosmos Edge*, será simplificada la ecuación para el cálculo de los esfuerzos en la base del diente de manera que no sean considerados los efectos por distribución de la carga entre dientes, la concentración de la carga en la línea de contacto y las cargas dinámicas, además de que en primera instancia solo serán evaluados engranajes cilíndricos de dientes rectos sin corrección.

De esta forma la ecuación base para los esfuerzos de flexión en el piñón es simplificada de la siguiente forma:

$$\sigma_{F1} = \frac{F_t}{b_1 \cdot m} \cdot Y_{Fa1} \cdot Y_{sa1} \cdot Y_\varepsilon \cdot \quad (\text{MPa})$$

El factor de forma Y_{Fa} permite que sea referido el cálculo a la flexión que se produce en la base del diente, cuando es considerada la carga en la cresta. Su valor está en dependencia del espesor normal en la sección crítica de la raíz del diente por fractura y del momento flector producido por la fuerza normal.

$$Y_{Fa} = \frac{6 \cdot \left(\frac{h_{Fa}}{m} \right)^2 \cdot \cos \alpha_{Fan}}{\left(\frac{s_{fn}}{m} \right)^2 \cdot \cos \alpha}$$

El factor de concentración de tensiones Y_{sa} es la razón entre el esfuerzo máximo aumentado por los concentradores de tensión y el esfuerzo de flexión básico definido de forma puramente geométrica. Este factor considera la influencia en el esfuerzo de flexión real del radio de curvatura en el filete de la raíz del diente ρ_f .

$$Y_{sa} = \left[1,2 + 0,13 \cdot \left(\frac{s_{fn}}{h_{Fa}} \right) \right] \cdot q_s \left[1,21 + \frac{2,3 \cdot h_{Fa}}{s_{fn}} \right]^{-1}$$

siendo:
$$q_s = \frac{s_{fn}}{2 \cdot \rho_f}$$

El cálculo analítico del factor Y_{sa} es explicado en la Norma ISO 6336-3 y en otras aplicaciones específicas de los engranajes cilíndricos. Generalmente su valor puede ser obtenido mediante curvas en gráficos para diferentes parámetros de la cremallera básica del engranaje, en función del número de dientes y el coeficiente de corrección.

Como ambos factores consideran la influencia de la forma del diente en el esfuerzo de flexión real, cuando la carga es aplicada en la cresta del diente, ha sido tomada la decisión práctica de evaluar el producto de ellos en un solo factor denominado:

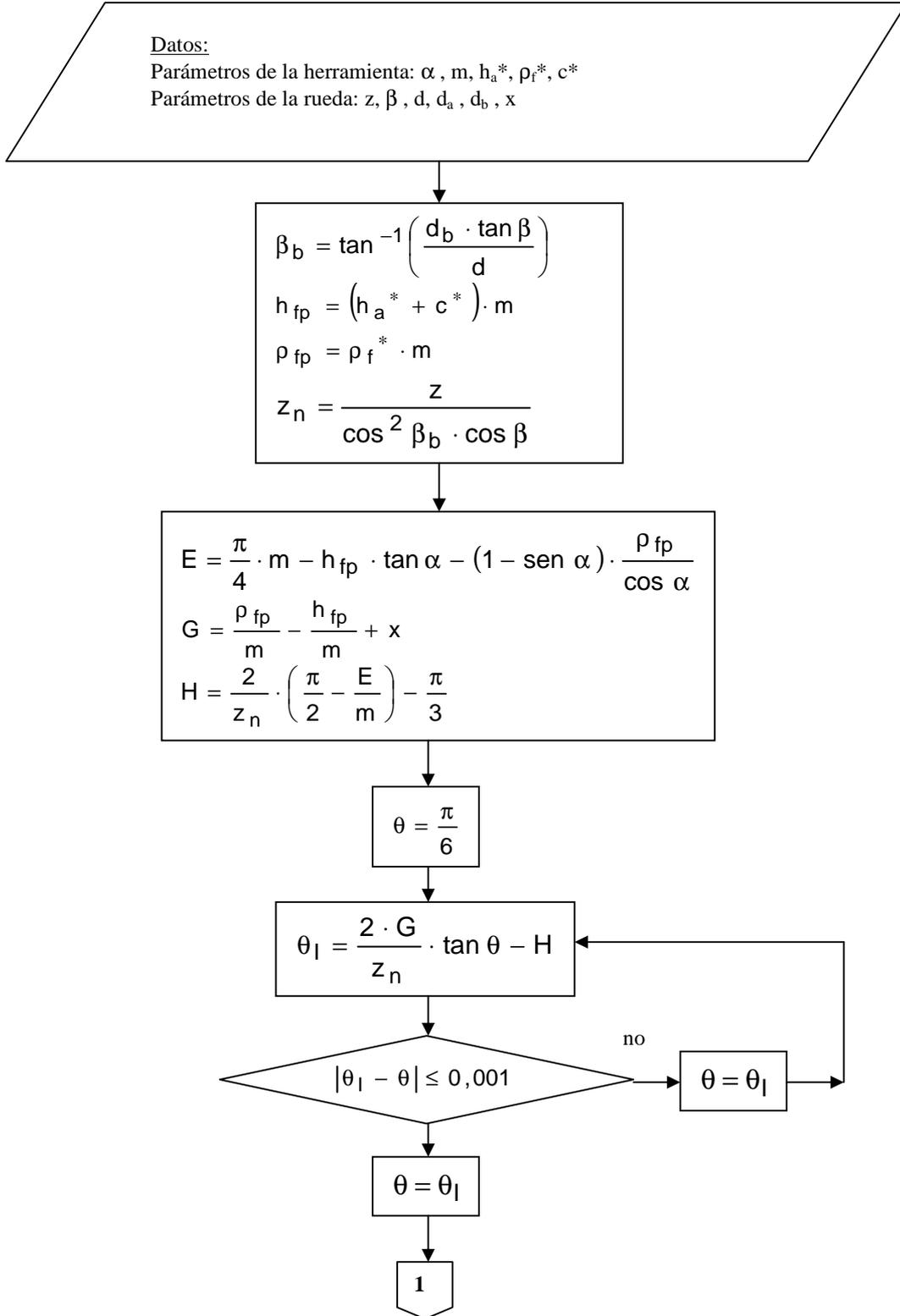
$$Y_{FS} = Y_{Fa} \cdot Y_{sa}$$

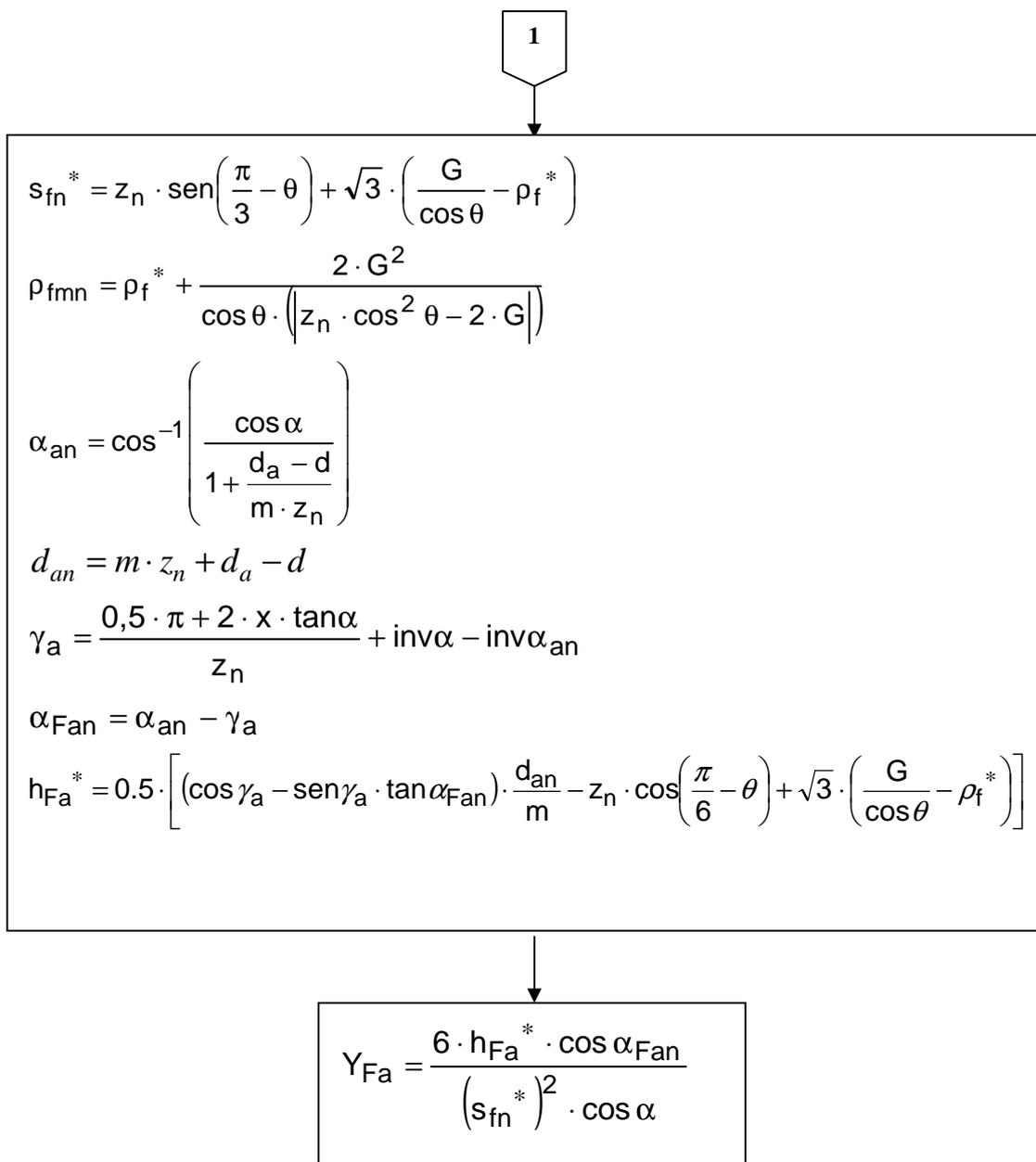
La condición empleada en el modelo para el cálculo del esfuerzo de flexión es en extremo crítica y con poca probabilidad de ocurrir en la práctica, pues solo cuando se está en presencia de un engranaje de ejes paralelos y ruedas cilíndricas de dientes rectos con una magnitud de coeficiente de recubrimiento $\varepsilon = 1$ ocurrirá que solo un par de dientes recibe toda la carga aplicada en la cresta de los dientes, en otras circunstancias es muy posible que solo un par transmita toda la carga, pero el punto crítico de aplicación será por debajo de la cresta del diente y por consiguiente el momento flector en la base del diente será menor que el supuesto en el modelo. Una de las alternativas para evaluar el factor Y_ε es la siguiente fórmula, brindada en la Norma ISO 6336-3 y con aceptación de aplicación en el cálculo de engranajes cilíndricos industriales:

$$Y_\varepsilon = 0,25 + \frac{0,75 \cdot (\cos \beta_b)^2}{\varepsilon_\alpha} \geq 0,625$$

En el presente trabajo ha sido desarrollado un algoritmo para evaluar el factor Y_{Fa} (incluyendo el caso de dientes helicoidales) mostrado a continuación:

Algoritmo para el cálculo del coeficiente de forma Y_{Fa} .





2. Resultados obtenidos.

Con empleo del algoritmo anterior y haciendo uso de las ecuaciones paramétricas que delimitan el perfil de los dientes fueron evaluados los esfuerzos en la base de los dientes, según la norma ISO 6336 y con empleo del

Solid Edge y *Cosmos Edge*, en 12 variantes de engranajes cilíndricos sin corrección en flanco. Los resultados se muestran a continuación.

Tabla 2. Resultados de los esfuerzos obtenidos con aplicación del método de los elementos finitos ($\sigma_{FICosmos}$) y el procedimiento ISO (σ_{FISO}). $\alpha = 20^\circ$, $ha^* = 1$, $pt^* = 0,3$, carga lineal 200 N/mm.

m	z	α_{Fan}	S_F^*	h_{Fa}^*	Y_{FS}	Y_ϵ	σ_{FISO} MPa	$\sigma_{FICosmos}$ MPa
2	14	32,4°	1,80	1,71	4,66	0,707	329,5	300
2	17	30,7°	1,86	1,70	4,51	0,700	315,7	285
2	20	29,5°	1,90	1,69	4,42	0,695	307,9	285
2	25	28,0°	1,96	1,68	4,34	0,690	299,5	280
5	14	32,4°	1,80	1,71	4,66	0,713	132,9	115
5	17	30,7°	1,86	1,70	4,51	0,707	127,5	110
5	20	29,5°	1,90	1,69	4,42	0,703	124,3	110
5	25	28,0°	1,96	1,68	4,34	0,700	121,5	110
8	14	32,4°	1,80	1,71	4,66	0,716	83,4	65
8	17	30,7°	1,86	1,70	4,51	0,710	78,9	60
8	20	29,5°	1,90	1,69	4,42	0,705	77,9	60
8	25	28,0°	1,96	1,68	4,34	0,701	76,0	60

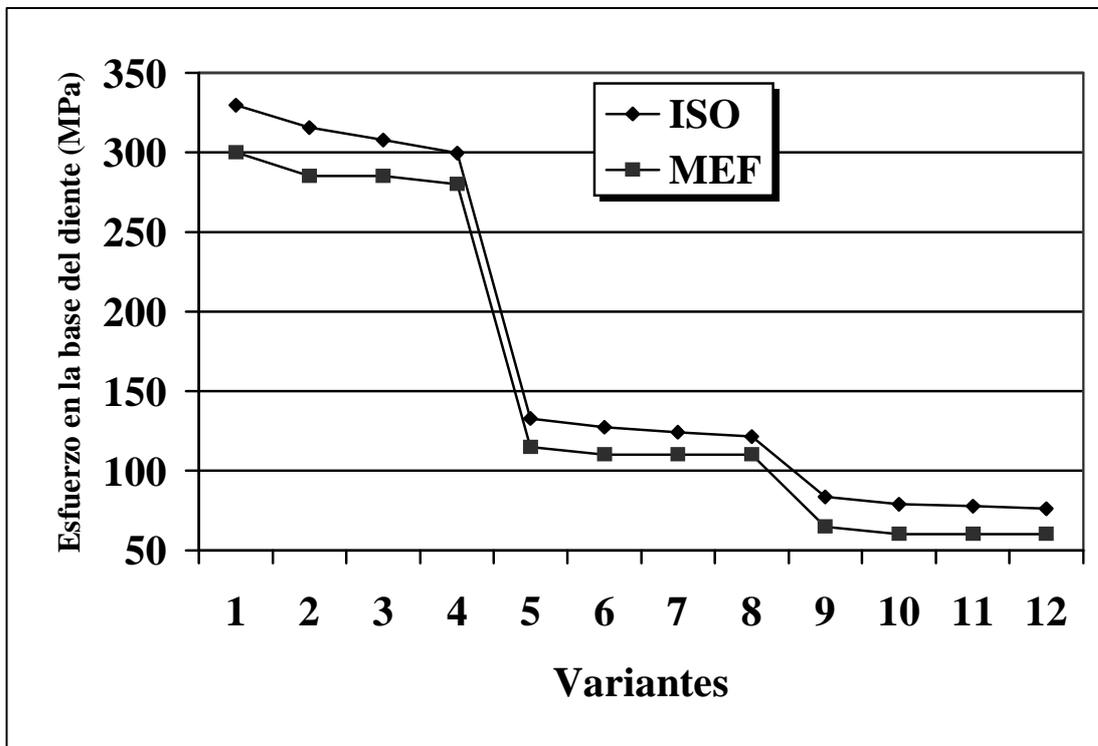


Fig. 6. Representación gráfica de los esfuerzos obtenidos mediante el método de los elementos finitos (MEF) y el procedimiento ISO.

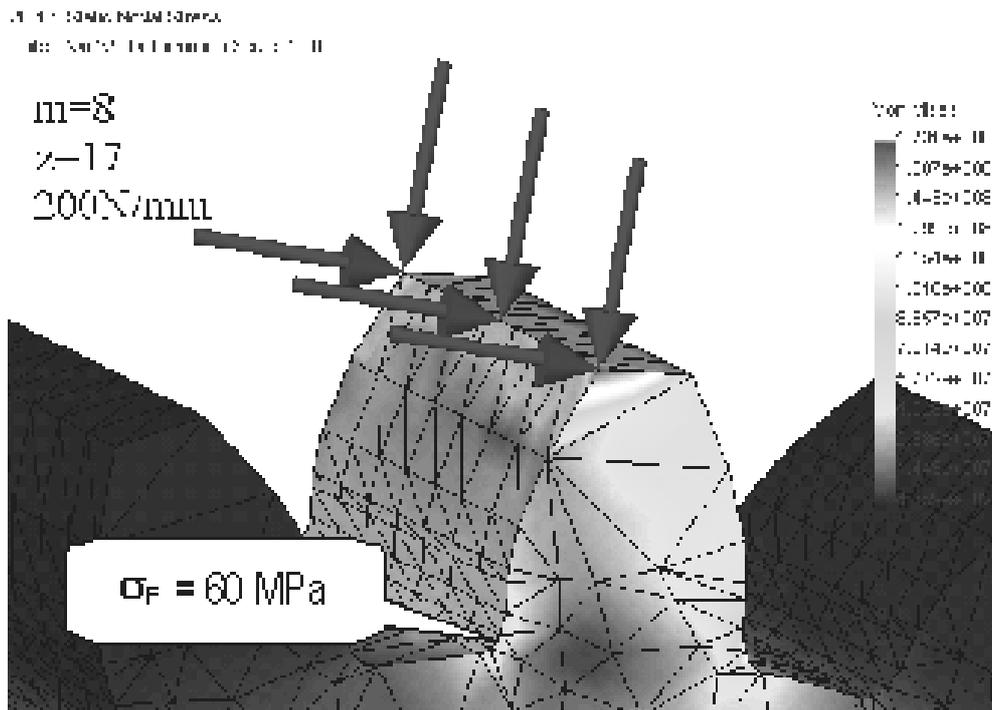


Fig. 7. Sector dentado del sólido de la rueda con la carga aplicada en la cresta de los dientes y malleado. Generación realizada con *Solid-Edge* y análisis de esfuerzo con *Cosmo-Edge*.

3. Conclusiones.

- En sentido general se observan valores cercanos de los esfuerzos actuantes en la base del diente empleando el procedimiento de la Norma ISO y la modelación con el *Solid Edge* y *Cosmos Edge*. Los valores de esfuerzos evaluados según el método de los elementos finitos son entre un 25 y un 9% mayor que los del procedimiento de la Norma ISO.
- La discretización del volumen con empleo de microvolúmenes tipo cubo son aceptables al realizar el malleado del sólido.
- Analizando un par de dientes de forma aislada en la línea práctica de engranaje, puede ser simplificada la generación del sólido, y por consiguiente del malleado del volumen sin apreciables diferencias en los resultados de los esfuerzos en la base del diente.
- Para un perfilado aceptable del contorno del diente es suficiente el trazado con 5 puntos de cada tipo de curva (evolvente y trocoide).
- En la zona de transición de la base del diente correspondiente a los esfuerzos normales de tracción se aprecia que el esfuerzo resultante es mayor según ISO que los evaluados por el criterio de *Hubert Mises*. Este resultado reafirma el hecho de que al ser despreciado los esfuerzos

de compresión producto de la carga radial, la resultante es mayor que el esfuerzo resultante determinado por el sistema *Solid Edge* en un 17%. En la etapa actual,...y en los venideros años, es apreciable la necesaria interrelación entre los procedimientos tradicionales (normas y relaciones empíricas) y los nuevos métodos CAD, como forma de potenciarlos y ampliar las posibilidades de un diseño racional.

Recomendaciones.

- Ampliar el estudio considerando engranajes con corrección de flanco, y modificaciones de la herramienta de generación.
- Aplicar la modelación con el *Solid Edge* en engranajes cilíndricos de dientes helicoidales.
- Estudiar las deformaciones de los dientes a plena carga para proponer modificaciones en el flanco que compensen las distorsiones del perfil de evolvente bajo carga y lograr diseños de engranajes de mayor capacidad de carga.
- Trabajar en la simulación del perfil de los dientes con el programa *Solid Edge* para crear patrones de referencia que permitan el descifrado de los parámetros geométricos básicos de los engranajes.

5. Referencias.

- 1 Houghson, D., GODA5 (Gear Optimization and Design Analyses 5), SAE Paper N° 801026, Warrendale, 1980
- 2 Houghson, D., "Analytical Derivation of Gear Tooth X Factor", Journal of the Industrial Mathematics Society, Volume II, 1951
- 3 Willis Jr., R.J., "Lightest-Weight Gears", Product Engineering, Ene. 21, 1963.
- 4 Johnson, R. C., Optimum Design of Mechanical Elements, New York, 1961
- 5 Heller, R. S., Bits y Bytes. Iniciación a la Informática, Madrid, 1984
- 6 Dana, D., Computer-Aided Spur Gear Design, SAE Paper N° 690564, Caterpillar Co., EUA, 1969
- 7 Escanaverino, J.M. y Uli, E. Algunas Experiencias en el Diseño de Engranajes con Ayuda de Computadoras. IV Conferencia Científica de Ingeniería y Arquitectura. ISPJAE, Nov. 1984.
- 8 Ruiz, H., "Cálculo Automatizado de Transmisiones por Engranajes Cilíndricos", Construcción de Maquinaria, Pags. 19-21, Vol. XII, N° 3, Jul-Sep, Las Villas, Cuba, 1987.
- 9 Chicurel, E., "Helical Gear Optimization by the Johnson Method", 7th World Congress of the Theory of Machines and Mechanisms, Sevilla, España, 1987
- 10 Drago, R., "Design Guidelines for High Capacity Bevel Gear Systems", SAE Paper N° 851571, 1985.
- 11 López, R., "Practical Optimization of Helical Gears Using Computer Software", Gear Technology, Pags. 16-21, Vol 10, N°3, Jun. 1993
- 12 Fuentes, J., Selección del Desplazamiento en Engranajes Cilíndricos Basada en el Recubrimiento y el Equilibrado Óptimo de Deslizamientos Específicos. I Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, Madrid, España, 1993.
- 13 González Rey, G., "Cálculo de Engranajes Cónicos". Ingeniería en Transporte, Vol XVI, #1-2, 1995
- 14 Tennyson, E. A., Finite Element Stress Analysis of Generic Spur Gear Tooth. AGMA Paper 1994.
- 15 Sfakiotakis, V. G., Numerical Simulation of Conjugate Spur Gear Action, Computers & Structures, Vol 79, May 2001.
- 16 MAAG Gear Company LTD, MAAG Gear Book. Calculation and Practice of Gears, Zurich 1990.

Agradecimientos.

Los autores agradecen a las Direcciones de los Departamento de Mecánica Aplicada del ISPJAE y de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Salamanca por las facilidades dadas en la ejecución de las prácticas de valoración de resultados. Como también, y de manera especial, desean hacer constar su reconocimiento al Vicerrectorado de Investigación de la Universidad de Salamanca por la financiación complementaria otorgada al citado trabajo que ha permitido una revisión y discusión de los resultados de una forma directa por los autores y el planteamiento de una futura estrategia de desarrollo colaborado.

The finite elements method as alternative in gear design.

Abstract:

Although the optimization and rational design of gears have been topics of many studies, they still continue being of interest for many gear specialists. The main reasons for this fact are conditioned, firstly, for the complex design of gears due to the number of variables, limitations and relationships involve, and secondly, the particularity that each case of optimization take in count function objectives, restrictions and independent variables generally different. In the most recent years, new calculation systems for assisting design (CAD) have been used as alternatives for gear calculations, but the diversity of systems and wide possibilities of models mathematical generation for evaluation of stresses and deformations require a report validation comparing with the results, procedures and standards established by the practice and experience of years. It is well-known that the final product of the new systems CAD with implementation of the finite elements method (FEM) is generally very dependent of the generation procedure used for mathematic models of elements and groups. Generally, these mathematical models are obtained by complicated procedures and treated as a *black box* by the suppliers of these potent programs and systems. In this sense, the present work seeks to contrast the numerical results obtained by means of the two most powerful CAD systems for easy application of the Finite Elements Method, Solid-Cosmo Edge, with the numerical results derived for ISO Standards calculation procedures to evaluate the load capacity in cylindrical gears. In this paper, bases for the generation method of teeth profile of spur gears, an algorithm for bending stresses calculation and the comparison of results obtained by one and another method are exposed.

Key words: Gear, bending stresses, ISO standards, finite elements, Solid-Cosmos Edge, CAD.