Modelos teóricos para el estudio de la deformación.

L. O'Connor Montero
Instituto Superior Politécnico "José A. Echeverría".
Unidad Docente Metalúrgica "Antillana de Acero".
Calle 20 No. 10522, Cotorro, Ciudad de La Habana, Cuba.
Teléfono 579461 al 63 Fax:338079
E-mail: udm@aacero.colombus.cu

(Recibido el 2 de febrero, aceptado el 2 de marzo)

Resumen

Se presenta una síntesis de modelos que permiten estudiar el proceso de deformación desde la ciencia de los materiales o desde la mecánica del medio continuo. Se insiste en las técnicas para definir los tensores de tensiones y deformaciones por considerarlos muy útiles y poco tratados en la literatura de la ingeniería. Las potencialidades que tienen estos tensores para la construcción de modelos matemáticos referidos a procesos técnicos, justifican los esfuerzos encaminados a una concreta aplicación. Las aspiraciones del autor son modelar el proceso de ensanchamiento del metal en la laminación como caso específico de desplazamiento de partículas.

Palabras claves: Tensores tensión y deformación, laminado, modelos matemáticos.

1. Introduccion.

Un tratamiento muy atractivo que admiten actualmente los problemas de ingeniería, particularmente los mecánicos y metalúrgicos, es aquel que se puede realizar desde las *ciencias de los materiales*. Entre los actuales problemas mecánicos y metalúrgicos se encuentra determinar el conjunto de condiciones de trabajo a las que estará expuesto un material para dotarlo de las propiedades requeridas. El estudio de los materiales para productos con fines tecnológicos o simplemente para procesos productivos debe consistir fundamentalmente en una rigurosa caracterización del material y de las condiciones de trabajo a las que será expuesto.

El tema que se presenta en este trabajo versa sobre modelos teóricos factibles de ser utilizados en el estudio de materiales sometidos a procesos de deformación.

La motivación principal del autor consiste en introducir en una tecnología de laminación métodos de cálculo que permitan obtener dimensiones de perfiles de materiales con alto nivel de precisión. Recursos de esta naturaleza se aplican en países de alto desarrollo tecnológico.

2. Modelo matemático según nociones de teoría atómica.

Cuando un material está expuesto a fuerzas, sus átomos se pueden desplazar de sus posiciones de equilibrio y en este caso la energía potencial **E** asociada a la separación atómica es una función que depende de la distancia interatómica y que alcanza su valor mínimo para la separación de equilibrio.

Esto significa que cualquier separación distinta a la de equilibrio produce un incremento de la energía y en consecuencia existe un trabajo de las fuerzas que causan el desplazamiento. Para modelos sencillos el trabajo se calcula mediante integrales unidimensionales de funciones reales.

En el caso específico del estudio de la deformación en términos del desplazamiento de átomos se tiene que la energía interactiva (potencial) entre átomos se expresa en función de las fuerzas de repulsión $\mathbf{F_r(a)}$ y de atracción $\mathbf{F_a(a)}$ donde la variable **a** indica la distancia entre los átomos. En este caso la energía potencial se expresa mediante :

$$E=\int_{s}^{l}(Fr(a)+Fa(a))da \quad (1)$$

Donde los valores de los límites de integración se plantean del análisis a realizar y puede llegarse a construir una expresión funcional en términos de **a** para **E** del tipo:

$$E(a)=\frac{k_1}{a}+\frac{k_2}{a^n} \quad (2)$$

Cuya representación gráfica no es difícil de obtener y donde **k1** y **k2** son determinadas constantes.

Esta función permite conocer la energía potencial para cualquier nivel de separación de los átomos.

Estas expresiones se complementan con las restricciones:

$$\frac{dE}{da}(a_0)=0 \quad (3)$$

$$E(a_0)=min\,E(a) \quad (4)$$

El modelo (1) – (4) caracteriza el estado del material al nivel de átomos y de la energía potencial ante la acción de fuerzas conformadoras.

3. Modelo variacional.

El modelo analizado anteriormente trata el tema desde el punto de vista del comportamiento de los átomos, sin embargo existen ciencias que consideran hipótesis tales que les permiten estudiar el problema macro mediante el estudio del comportamiento de puntos materiales. El modelo de ocasión se corresponde con una de esas concepciones.

Cuando el problema se plantea en términos de movimiento de un sistema de **i** partículas de masas respectivas $\mathbf{m_i}$ en un cuerpo, entonces se emplea un modelo variacional debido a que se considera la energía cinética **T** y la energía potencial **U** del sistema de partículas; estas funciones se hacen depender de las posiciones relativas de las partículas, de la rapidez de cambio de estas posiciones y estas variables a su vez del tiempo.

Al tener en cuenta las condiciones anteriores y articularlas con el principio de la acción estacionaria de *Ostrograski – Hamilton* acerca de las fuerzas conformadoras resulta el modelo siguiente:

$$F(x,y,z)=\int_{t1}^{t2}(T-U)dt \quad (5)$$

T-U=(T-U) (x,y,z,x’,y’,z’) (6)

x = x (t), y =y (t), z = z (t) (7)

x’ = x’ (t), y’ = y’ (t), z’ = z’ (t) (8)

Las fuerzas conformadoras están dadas por un campo vectorial tal que sobre la partícula **i** actúa la fuerza $\mathbf{F_i}$ de componentes $\mathbf{F_{ix}}$, $\mathbf{F_{iy}}$ y $\mathbf{F_{iz}}$ y donde se cumple:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-F_{ix}\,,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=-F_{iy}\,,\,,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=-F_{iz} \quad (9)$$

En el caso de análisis se establece un criterio para la energía cinética T, el movimiento de las partículas se realiza de modo tal que las nuevas posiciones de las partículas constituyen puntos estacionarios del funcional F y deben satisfacerse restricciones específicas dadas en la práctica.

4. Modelo tensorial.

En el quehacer científico las ciencias surgen como consecuencia de las nociones que se sistematizan en el estudio de un objeto. La presentación que sigue a continuación se corresponde con la ciencia de los materiales y con la mecánica del medio continuo, ambas incluyen la elastoplasticidad como una de las teorías que permiten estudiar el comportamiento de los materiales ante fuerzas conformadoras.

El concepto de tensión, el tensor de tensiones y su aplicación.

Toda expresión analítica en términos de 9 elementos independientes que resulta de un análisis de las fuerzas en un punto de un cuerpo isótropo, continuo y homogéneo, se dice que es del tipo *tensorial*. Esta es una afirmación, que si bien es cierta, no constituye una definición formal del *cálculo tensorial*, pero sirve para nuestros propósitos; los interesados pueden encontrar en la literatura matemática y para la ingeniería diferentes definiciones de tensor. [1, 2, 3].

Desde el inicio del estudio acerca de los tensores aplicados a la ingeniería el autor ha utilizado una definición elaborada por colegas de la Universidad de La Habana [1] que tiene determinadas ventajas en los cálculos; se establece en términos de suma de productos diádicos y mediante la cual se pudo encontrar una formulación para el ***tensor de inercia*** de un cuerpo en estudios de ***estática***. [2]

No obstante estos resultados y motivado por el contexto prefiero exponer el tema siguiendo ideas propias de la mecánica del medio continuo al estilo de *Serrano Lizaola* [3]. En este sentido vale la pena aclarar que es una tendencia que físicos, mecánicos e ingenieros en general identifiquen los tensores y las matrices. Existen, sin embargo, apreciables diferencias, pues:

- Las *matrices* tienen su origen en las matemáticas y en particular en el álgebra, mientras que los *tensores* tienen su origen en la mecánica y la física, por lo que en consecuencia tienen un significado físico.
- El *cálculo tensorial* estudia el fenómeno de la invarianza ante cambios de coordenadas y las *matrices* son modelos para describir sistemas de ecuaciones.
- Los *tensores* están asociados a productos diádicos, y las *matrices* a productos escalares y vectoriales.
- Una *matriz* no admite representación gráfica en tanto el *tensor* sí mediante técnicas de canonización y utilización de superficies cuádricas.

No obstante estas diferencias, y otras que se pudieran describir, es una suerte que el desarrollo de la ciencia halla encontrado compatibilidad entre el cálculo tensorial y el álgebra matricial en lo que respecta a determinados modelos.

En la literatura se define el concepto Tensión como:

$$\vec{t} = \lim_{\Delta A \to o} \frac{\vec{F}}{\Delta A} \qquad (10)$$

Donde ΔA es un área de una superficie que contiene el punto donde se desea estudiar una tensión resultante. Vamos a considerar para este propósito a $\{F_1, F_2, F_3\}$ como un sistema de fuerzas independientes en un punto **P** de la superficie **S** del cuerpo **C** y en ese punto hay una tensión t que se describe según:

$$\vec{t} = \dot{t}^1 + \dot{t}^2 + \dot{t}^3 \qquad (11)$$

Sea la familia de productos escalares $\mathbf{F^{ij}} = \mathbf{F^i} \cdot \mathbf{F^j}$ reconocidas como *tensor métrico*, entonces la familia de valores $s^{\mathbf{ij}}$ según los cuales:

$$\vec{t}^{\,i} = \frac{1}{\sqrt{F^{ij}}}\left[s^{ij}\ F_j\right] \qquad (12)$$

Se denomina ***tensor de tensiones.*** Se debe reconocer que se aplica el criterio de principio de sumación, el cual indica que se suma en **j**, como por ejemplo:

$$t_1 = \frac{\sqrt{F_{11}}}{J}\left[\sigma_{11}F^1 + \sigma_{13}F^3 + \sigma_{13}F^3\right] \qquad (13)$$

y que convierten combinaciones lineales de las fuerzas **Fj**, según las componentes métricas $\mathbf{F^{i\ j}}$ y según las componentes $s^{\mathbf{ij}}$ del tensor de tensiones, en la componente vectorial $\mathbf{t^i}$ de la tensión **t**.

En la práctica el resultado más importante es que:

$$\vec{t} = s^{ij}\ \vec{n} \qquad (14)$$

Donde $\vec{n}$ es la normal a una superficie y **t** es la tensión a la superficie, según esa normal y constituye una expresión que admite un carácter operacional.

La aplicación de este resultado a la laminación se concreta en el sentido de que $\vec{n}$ constituye la normal a la pared del calibre, mientras que **t** indica la tensión a la cual está sometido el metal en ese punto de análisis.

En la ingeniería mecánica se establece el *tensor de tensiones* en cortantes y normales dado por:

$$s = \begin{pmatrix} s_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & s_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & s_{zz} \end{pmatrix} \qquad (15)$$

La representación matricial es puramente convencional, debido a que se considera el tensor como las nueve magnitudes independientes que adquieren un significado físico y que por tales razones se distinguen de una matriz.

Es oportuno comentar que existen diferencias entre las dos técnicas presentadas acerca de la construcción del tensor de tensiones.

En el primer caso las componentes del tensor resultan de valores que cumplen las restricciones (12) y, en el segundo caso, de un análisis según el cual la tensión **t** no es paralela a la normal n al plano según el cual se desea obtener la tensión, admite una descomposición en términos de tres tensiones $\mathbf{t_x}$, $\mathbf{t_y}$, y $\mathbf{t_z}$ normales a planos que definen un tetraedro con el plano de normal **n** y cada una de estas tensiones se descompone a su vez de modo conveniente según las componentes del tensor s. De este trabajo resultan las componentes de este tensor.

- ***El tensor de deformación y su aplicación.***

Existen en la literatura distintos tratamientos respecto a la construcción del tensor de deformación, esto se debe básicamente a las diferencias relacionadas con las ideas del desplazamiento de las partículas.

En el caso que nos ocupa solamente se ilustran consideraciones de carácter general coherentes entre sí.

Si consideramos una partícula **P** de un cuerpo **C** que será sometido a un proceso de deformación. Al realizarse la deformación dicha partícula recorre una trayectoria **U** que admite la representación geométrica mostrada en la figura 1:

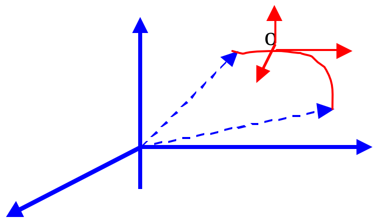

Fig. 1 Representación geométrica de la trayectoria de la partícula.

Donde **s** (q^{i}) es la posición de la partícula antes de la deformación y **r** $(q^{\mathbf{i}},\mathbf{t})$ es la posición de la partícula después de la deformación.

Para los análisis que se requieren realizar se definen dos sistemas de referencia:

- uno fijo al cuerpo – definido por $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$
- y otro fuera del cuerpo – definido por (x^1, x^2, x^3)

La trayectoria **U** de la partícula **P** se define por:

$$U(\theta^i,t) = r(\theta^i,t) - s(\theta^i) \qquad (16)$$

El análisis de este desplazamiento incluye el cálculo de su velocidad o velocidad de deformación y el cálculo de la aceleración.

Para el caso de la velocidad de deformación se indica su variación mediante:

$$\frac{\partial v}{\partial q_i} = v,_i \qquad (17)$$

Es justo reconocer que esta expresión se corresponde con el análisis tensorial y no con el cálculo tensorial y es necesario aclarar que se admiten también las notaciones:

$$\mathbf{v}^{\mathbf{j}}\ \text{ê}_{\mathbf{i}}\,\mathbf{F_j} = \mathbf{v}^{\mathbf{j}}\ \text{êê}_{\mathbf{i}}\,\mathbf{F_j} = \frac{\partial v}{\partial q_i} = v,_i \qquad (18)$$

lo cual indica las expresiones vectoriales equivalentes para las componentes de la variación de la velocidad de deformación.

En términos del proceso de laminación esto indica una expresión vectorial para la variación de la velocidad de deformación en cada punto del material.

Se puede probar que cada $\mathbf{F_i}$ depende del tiempo **t,** por lo que en este caso:

$$\mathbf{v}^{\mathbf{j}}\ \text{ê}_{\mathbf{i}}\,\mathbf{F_j} = \mathbf{v}^{\mathbf{j}}\ \text{êê}_{\mathbf{i}}\,\mathbf{F_j} = \frac{\partial v}{\partial q_i} = v,_i \qquad (19)$$

es igual a la derivada

$$\frac{dF_i(t)}{dt} \qquad (20)$$

En función de estos términos se define el ***tensor velocidad de deformación*** que incluye la ***distorsión y la traslación***, y que se expresa en los términos siguientes:

$$d^{i}_{\ j} = \frac{1}{2}\left(v^{i},j + F^{ik} v_{j}\big|_{k}\right) \qquad (21)$$

Se define el ***tensor de rotación*:**

$$v^{i}_{\ j} = \frac{1}{2}\left(v^{i},j - F^{ik} v_{j}\big|_{k}\right) \qquad (22)$$

Sumando los tensores: velocidad de deformación y de rotación, se obtiene el ***tensor de deformación*** dado por:

$$H^{i}_{\ j} = v^{i}\big|_{j} = v^{i},j = \frac{dF_j(t)}{dt} \qquad (23)$$

Lo cual se puede demostrar aplicando:

- la regla de la cadena,
- la existencia de los sistemas de referencia
- y la expresión analítica del desplazamiento U.

Puede ser útil explicar que en la expresión anterior se define el ***tensor de deformación*** en términos de la derivada temporal de las funciones vectoriales $\mathbf{F_j(t)}$, las cuales indican sistemas de fuerzas en cada punto del recorrido de la partícula que representa un punto del cuerpo cuya deformación se estudia.

Al igual que antes, se debe aclarar que existen otros recursos y otras denominaciones para definir el ***tensor de deformación.***

Un resultado muy importante de aplicación al *proceso de laminación* es el que se indica en la expresión:

$$H \circ s = r \qquad (24)$$

Lo cual admite como interpretación el hecho de que el tensor deformación actuando como operador sobre el vector **s** , o posición de la partícula antes de la deformación, permite obtener el vector **r** cuyo extremo es la posición de la partícula después de la deformación.

Es necesario admitir que las posiciones de la partícula antes y después de la deformación se están indicando en términos del sistema de referencia externo al cuerpo; sin embargo, los análisis realizados consideran ambos sistemas, solo que se omitieron los cálculos diferenciales según la regla de la cadena aplicable a ecuaciones de enlace entre los variables de los sistemas de referencia.

Esta técnica para construir el ***tensor deformación*** se fundamenta en los *efectos de traslación, rotación y distorsión;* así como en los *conceptos de simetría y ante-simetría del cálculo tensorial,* aunque no es la única vía.

Otra manera conocida es definir la *deformación* como la diferencia entre dos elementos diferenciales de arco:

$d\bar{s}^2$ y ds^2 correspondientes a antes y después de la deformación respectivamente.

Este camino conduce a la expresión:

$$g_{ij} = ½ (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \qquad (25)$$

Que define las componentes del tensor deformación, donde los sumandos de la derecha son funciones de las coordenadas q^i y constituyen derivadas de las funciones componentes del desplazamiento U.

A esta expresión se llega después de considerar simplificaciones en modelos más complejos a consecuencia de que las teorías elaboradas tratan deformaciones pequeñas y desprecian términos diferenciales de segundo orden en desplazamientos**.**

Es frecuente encontrar estudios más simplificados en los cuales el desplazamiento se considera según las tres direcciones de un sistema rectangular, con funciones u, v, w del desplazamiento, donde las componentes (25) del ***tensor deformación*** adquieren estructuras muy sencillas.

La relación *tensión – deformación.*

Un estudio acabado del modelo tensorial debe incluir necesariamente la relación *tensión – deformación*.

Existen relaciones en el medio elástico y en el medio elasto-plástico y suelen ser llamadas relaciones constitutivas. No son objeto de análisis en este trabajo por un problema de extensión y porque merecen ser presentadas como un objeto en sí mismo.

El fundamento básico para los nexos *tensión-deformación* es la Ley de Hooke; sin embargo, este breve comentario es sólo para destacar que la esencia de una generalización de esta ley en términos tensoriales es que se establece una expresión general que permite relacionar componentes respectivas de los tensores de tensión y de deformación. Infelizmente esta noción no pertenece a la cultura ingenieríl y se requiere una promoción en el contexto de la enseñanza universitaria.

5. Conclusiones.

- Existen diversos métodos para estudiar el desplazamiento de partículas, tales como los *métodos variacionales* que consideran la energía de la partícula y que conducen a modelos en los cuales intervienen funcionales en expresiones integrales y *métodos numéricos* según elementos finitos, que constituyen modelos específicos de simulación.
  - En experiencias personales el autor ha apreciado la aplicación de métodos experimentales de medición del desplazamiento del metal para construir ecuaciones que definen modelos generales aplicables al cálculo de calibraciones.
  - En estos trabajos no se aplica el criterio de este autor de modelar el comportamiento del material a partir del estudio de condiciones de trabajo y de sus propiedades.
  - Los modelos que se presentan en este trabajo en términos *tensoriales,* a juicio del autor, tienen un elegante aspecto, entrañan complicadas y sintetizadoras notaciones, y poseen la ventaja significativa de ser aplicables al estudio del desplazamiento de una partícula cualquiera sea el proceso de conformación de que se trate y con el criterio de reconocer la existencia de invariantes independientemente del sistema de referencia que se defina.
  - Para lograr una aplicación de estos métodos a la conformación de metales y poderse incorporar a una tecnología de laminación, se requiere determinar expresiones para las fuerzas que actúan sobre la partícula en cada instante de su trayectoria, lo cual constituye una de las mayores dificultades del proceso, junto al hecho de que llevarlo a la práctica implicaría un cuidadoso trabajo de discretización del recorrido de la partícula.

Bibliografía

1.-Jenes, A. y otros. Breve introducción al cálculo tensorial. Ediciones ISPJAE. La Habana, 1991.

2.-O'connor Montero, L. *Perfeccionamiento de la Disciplina Matemática en la carrera Metalurgia*. Tesis Doctoral. La Habana, 1999.

3.-Serrano Lizaola, R. Cálculo tensorial para ingenieros. Benemérita Univ. Autónoma de Puebla. México. 1996.

4.-Tecnología de laminado de perfiles ligeros. Folletos. Empresa Antillana de Acero.

5.-Thornton A. Peter. Ciencia de materiales para ingeniería. Prentice-hall hispanoamericana S.A. 1987.

Theorical models for the study of deformation.

Abstract

A synthesis of the models that permit the study of the process of deformation either from the primt of the science of materials or continous bodies is presented. Emphasis is placed on the techniques used to define tensional and deformation tensors for their being so useful and not very frequent in engineering literature. The potentials that theses tensors have for the construction of mathematical models referred technical processes justicify the efforts leading to a concrete application. It is the author`s intention to model the spreading of metals in the rolling process as a specific case of particle displacement.

Key words: Tensionals and deformation tensors, rolling mill, mathematical models.

SISTEMAS INGENIERILES COMPUTARIZADOS

Curso de posgrado.

Temática: Sistemas Objeto. Sistemas de dirección. Organización estructural de los sistemas de dirección. Principios del enfoque cibernético. Tareas Ingenieriles de toma de decisiones : Análisis externo e interno. Modelación y simulación matemática. Funciones aproximatorias. Organización racional de los procedimientos de cálculo de ingeniería. Caracterización de los Cálculos de ingeniería como tareas de optimización multiobjetivo. Características generales de los tipos de métodos de optimización en la solución de tareas de ingeniería. Uso combinado de las técnicas de optimización y simulación de sistemas.

Duración: 45 HORAS
Coordinador : Dr José Arzola Ruiz
Correo Electrónico: udm@aacero.colombus.cu

Resumen Curricular del Coordinador

Dr. Ciencias Técnicas. Investigador Titular y Profesor Titular del ISPJAE. Especialista en cibernética técnica, control automático y sistemas de dirección organizativos, tecnológicas y de control de procesos. Es autor de dos libros sobre estos temas. Ha impartido cursos de post-grado relacionados con su línea de trabajo. Actualmente trabaja en el desarrollo de un enfoque integrador para el diseño de sistemas automatizados relacionados con la industria.