

# Evaluación de las cargas dinámicas internas en engranajes cilíndricos de contacto exterior.

**G. González Rey, M.E.García Domínguez.**

Instituto Superior Politécnico *José Antonio Echeverría* (ISPJAE).  
Facultad de Ingeniería Mecánica. Departamento de Mecánica Aplicada  
Calle 116 s/n, CUJAE, Marianao 15. Ciudad de la Habana, Cuba.  
Teléfono : (537)-2602267 Fax  
E-mail: [cidim@mecanica.ispjae.edu.cu](mailto:cidim@mecanica.ispjae.edu.cu)

(Recibido el 10 de enero de 2001; aceptado el 22 de febrero de 2001)

## Resumen

En el artículo se presentan y esclarecen las cinco diferentes metodologías de cálculo del coeficiente de carga dinámica presentes en la Norma ISO 6336-96. Con el objetivo de conocer la conveniencia de aplicación y las limitaciones que presentan los diferentes métodos de cálculo son comparados estos con algunos resultados prácticos. Aunque las valoraciones del coeficiente de carga dinámica en los engranajes cilíndricos están en una etapa bastante avanzada aún los procedimientos contemplados en la actual Norma ISO muestran dificultades en la precisión de la frecuencia de resonancia del engranaje.

**Palabras claves:** Engranajes cilíndricos, cargas dinámicas, norma ISO, factor de carga dinámica.

---

## 1. Introducción.

Luego de más de una década de trabajo del Grupo No. 6 del Comité Técnico 60 de ISO, responsabilizado con la elaboración y aprobación de normas internacionales relativas a transmisiones por engranajes, es editada en septiembre de 1996 la Norma ISO 6336 para el cálculo de la capacidad de carga de engranajes cilíndricos [1]. Mucho del tiempo empleado en el análisis y aprobación de esta norma fue dedicado a lograr conciliar las diversas propuestas de cálculo de aquellos factores con influencia en la capacidad de carga de los engranajes cilíndricos y de aceptación por la mayoría de los conocedores del tema.

Dentro de aquellos factores con una mayor diversidad de propuestas, es destacable el factor de carga dinámica  $K_v$ , el cual toma en cuenta las cargas generadas internamente en los dientes de las ruedas, inducidas por un contacto de los dientes fuera de la línea de engrane y por imperfecciones de sus flancos activos.

El coeficiente de carga dinámica es posiblemente uno de los aspectos más investigados y todavía poco comprendidos en los engranajes. Muchos han sido los esfuerzos dirigidos para lograr una evaluación precisa

de este factor, en los cuales destacan los trabajos realizados por Buckingham [2], Tuplin [3,4] y Niemann [5], así como posteriormente los recogidos en las normas DIN 3990 [6] y AGMA 2001 [7]. Muchos de estos trabajos fueron las fuentes básicas empleadas por los miembros de ISO/TC60-WG6, para elaborar la Norma ISO 6336.

## 2. Diferentes métodos para el cálculo de $K_v$ en la Norma ISO 6336-1:96.

En la Norma ISO 6336 son aceptados un total de cinco métodos para evaluar el coeficiente  $K_v$ , conocidos como método A, B, C, D y E, con diferencias en la complejidad de cálculo y en los factores considerados con influencia en las cargas dinámicas internas. Hasta el momento solo se tienen fórmulas aproximadas para determinar el referido coeficiente, por lo que se hace necesario conocer la conveniencia de aplicación y las limitaciones que presentan los diferentes métodos de cálculo del coeficiente de carga dinámica expuestos en la Norma ISO 6336-1:96.

## 2.1 - Coeficiente de carga dinámica según Método A.

Este método es aplicable cuando se dispone de una suficiente información del comportamiento y magnitud de la carga dinámica generada internamente durante la transmisión del movimiento entre las ruedas, soportando los dientes una carga plena en el régimen de explotación nominal. Se prevé que este coeficiente de carga dinámica sea evaluado a partir de mediciones exactas y con un amplio análisis matemático del sistema de transmisión.

Este es un método recomendado cuando se dispone de toda la información referida a la carga en los dientes y la posibilidad de definir con exactitud práctica la magnitud de la fuerza interna generada por los impactos entre los dientes, permitiendo una evaluación del factor de carga dinámica  $K_v$  según la siguiente relación :

$$K_v = \frac{F_d + F_t}{F_t} \quad (1)$$

donde:

$F_d$  : Incremento dinámico de la carga en los dientes, debido a la respuesta dinámica del engranaje a la excitación producida por los errores de transmisión, sin incluir la fuerza tangencial nominal transmitida [N].

$F_t$  : Fuerza tangencial nominal transmitida [N].

## 2.2 - Coeficiente de carga dinámica según Método B.

El procedimiento de cálculo del coeficiente de carga dinámica  $K_v$  en engranajes de ejes paralelos y ruedas cilíndricas, según el método B, toma como referencia la norma alemana DIN 3990-1 y fue aceptado con ligeras modificaciones en la Norma ISO 6336-1.

Para la evaluación del coeficiente de carga dinámica  $K_v$  este método propone que el par de ruedas engranadas sea considerado como dos masas reducidas  $m_1^*$  y  $m_2^*$ , las cuales son vinculadas a un muelle de rigidez  $c_\gamma$ . En el modelo de análisis, los parámetros  $m_1^*$  y  $m_2^*$  son representativos de las masas del piñón y de la rueda por unidad de ancho y el término  $c_\gamma$  del valor unitario medio de la rigidez.

El modelo de análisis previsto para evaluar  $K_v$  considera la influencia de la frecuencia de resonancia en el incremento de la carga dinámica en los dientes, según es mostrado en la figura 1, aunque para ciertos casos los valores esperados no son lo suficientemente precisos, pues no es considerada la influencia de otras etapas de la transmisión en el engranaje analizado, ni los efectos que puede producir la vibración torsional en todo el sistema de transmisión, entre otros aspectos.

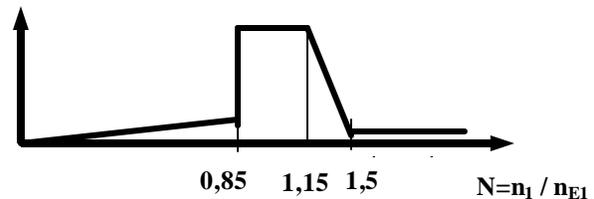
Las fórmulas para evaluar  $K_v$  corresponden con los siguientes cuatro regímenes, definidos al considerar la posible resonancia del engranaje y la relación entre la frecuencia de rotación del piñón  $n_1$  y la frecuencia de resonancia  $n_{E1}$  :

Subcrítico.  $[n_1/n_{E1} \leq 0,85]$

Resonancia.  $[0,85 < n_1/n_{E1} \leq 1,15]$

Intermedio.  $[1,15 < n_1/n_{E1} < 1,5]$

Supercrítico.  $[n_1/n_{E1} \geq 1,5]$



**Figura 1** - Comportamiento del coeficiente de carga dinámica  $K_v$  en dependencia de la razón de resonancia ( $N=n_1 / n_{E1}$ ), para una carga nominal constante en los dientes, según el método B.

Para establecer el régimen de trabajo del par de ruedas analizadas, es empleado el factor adimensional  $N$ , denominado *Razón de Resonancia* y calculado según la ecuación (2) :

$$N = \frac{n_1}{n_{E1}} = \frac{n_1 \cdot \pi \cdot z_1}{30000} \cdot \sqrt{\frac{m_{red}}{c_\gamma}} \quad (2)$$

donde :

$n_1$  : frecuencia de rotación del piñón ( $\text{min}^{-1}$ ).

$z_1$  : número de dientes en el piñón.

$c_\gamma$  : rigidez media por ancho de diente en el engrane ( $\text{N}/(\text{mm} \cdot \mu\text{m})$ ),

$m_{red}$  : masa por unidad de ancho de las ruedas, reducida y ubicada sobre la línea de engranaje ( $\text{kg}/\text{mm}$ ).

Para el cálculo de la masa reducida  $m_{red}$ , pueden ser empleados los procedimientos clásicos de Teoría de Mecanismos y Mecánica Teórica. Para el caso particular de un par de ruedas cilíndricas con contacto exterior puede ser empleada la ecuación siguiente :

$$m_{red} = \frac{I_1^* \cdot I_2^*}{I_1^* \cdot r_{b2}^2 + I_2^* \cdot r_{b1}^2} \quad (\text{kg}/\text{mm}) \quad (3)$$

donde :

$I_1^*$ ,  $I_2^*$  : momentos polares de inercia de las masas de las ruedas, por unidad de ancho ( $\text{Kg} \cdot \text{mm}^2/\text{mm}$ ).

$r_{b1}$ ,  $r_{b2}$  : radios básicos de las ruedas (mm).

Para caracterizar la rigidez media del engrane es empleado el valor medio de rigidez de todos los dientes en el engrane. La ecuación (4) es apropiada, en cálculos

aproximados, para el caso de engranajes cilíndricos con valores de coeficientes de recubrimiento transversal  $\varepsilon_\alpha \geq 1,2$  y ángulos de hélice  $\beta \leq 45^\circ$  [8]

$$c'_{\gamma} = c' \cdot (0,75 \cdot \varepsilon_\alpha + 0,25) \quad (\text{N}/(\text{mm} \cdot \mu\text{m})) \quad (4)$$

donde :

$\varepsilon_\alpha$  : coeficiente de recubrimiento en el plano transversal.

$c'$  : rigidez de un par de dientes engranados ( $\text{N}/(\text{mm} \cdot \mu\text{m})$ ).

La rigidez de un par de dientes  $c'$  en la ecuación (4) es considerada como la rigidez máxima del par de dientes en contacto durante su trayectoria por la línea de engranaje. Este valor es aproximadamente igual a la máxima rigidez del par de dientes en la zona en que solo ellos transmiten la carga. Para una carga específica en los dientes del engrane mayor de 100 N/mm, es orientada la ecuación (5) para calcular la rigidez del par de dientes.

$$c' = 0,8 \cdot c'_{th} \cdot C_R \cdot C_B \cdot \cos(\beta) \quad (\text{N}/(\text{mm} \cdot \mu\text{m})) \quad (5)$$

donde :

$$c'_{th} = \left( C_1 + \frac{C_2}{Z_{v1}} + \frac{C_3}{Z_{v2}} + C_4 \cdot x_1 + \frac{C_5 \cdot x_1}{Z_{v1}} + C_6 \cdot x_2 + \frac{C_7 \cdot x_2}{Z_{v2}} + C_8 \cdot x_1^2 + C_9 \cdot x_2^2 \right)^{-1} \quad (\text{N}/(\text{mm} \cdot \mu\text{m})) \quad (7)$$

**Tabla 1-** Valores de los coeficientes de la ecuación [7] . Unidades en ( $\text{N}/(\text{mm} \cdot \mu\text{m})$ ).

$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$C_8$	$C_9$
0,04723	0,15551	0,25791	0,00635	0,11654	-0,00193	0,24188	0,00529	0,00182

donde :

$x_1, x_2$  : coeficientes de corrección de los dientes del piñón y de la rueda.

$Z_{v1}, Z_{v2}$  : número de dientes de las ruedas equivalentes (virtuales).

Los errores inevitables, durante la elaboración de las ruedas dentadas, en la magnitud del paso y la forma del perfil, así como los desplazamientos elásticos de los dientes bajo carga, provocan cierta irregularidad del movimiento en la rueda conducida a pesar que la rueda motriz gire uniformemente. Esta irregularidad del movimiento provoca cargas dinámicas sobre los dientes y el trabajo del engranaje con vibraciones y ruidos.

Las principales cargas dinámicas en los dientes de las ruedas se producen al engranar los dientes y desengranar el par de dientes precedente. Para conseguir el trabajo sin colisiones, es necesario que los dientes al transmitir la carga establezcan contacto sobre la línea de engrane, es decir, que sean iguales los pasos de los dientes de las ruedas engranadas y que los perfiles de

$\beta$  : ángulo de la hélice de los dientes en el cilindro de referencia.

$C_R$  : factor por tipo de rueda. Para ruedas macizas debe ser tomado  $C_R = 1$ , en caso de ruedas con vaciados en sus llantas pueden ser tomado hasta un valor mínimo de  $C_R = 0,7$ .

$C_B$  : factor por tipo de cremallera básica. Para engranajes con cremallera básica de referencia según ISO 53 -1974 puede ser empleado  $C_B = 1$ , para otras condiciones es orientado evaluar la siguiente ecuación:

$$C_B = \left[ 1 + 0,5 \cdot \left( 1 + \rho^*_{fp} - h^*_{fp} \right) \right] \cdot \left[ 1 - 0,02 \cdot \left( 20^\circ - \alpha \right) \right] \quad (6)$$

siendo :

$\rho^*_{fp}$  : factor del radio de curvatura en el pie del diente de la cremallera de referencia.

$h^*_{fp}$  : factor de altura del pie del diente en la cremallera de referencia.

$\alpha$  : ángulo de flanco del perfil del diente en la cremallera de referencia ( $^\circ$ ).

$c'_{th}$  : rigidez teórica de un par de dientes engranados ( $\text{N}/(\text{mm} \cdot \mu\text{m})$ ). El valor de la rigidez teórica puede ser obtenido de la ecuación (7) y la tabla 1

los dientes garanticen que la normal al punto de contacto pase por el punto de tangencia de las circunferencias primitivas. Por ello, a pesar de que las ruedas se fabricaran con absoluta exactitud, tendrían lugar las colisiones, ya que las deformaciones, inevitables de los dientes a causa de la carga, influyen en el engrane del mismo modo que los errores del paso o del perfil.

Experiencias obtenidas de los estudios realizados por los profesores estadounidenses Seireg y Houser, demuestran el significativo efecto que producen los errores de paso en la carga dinámica interna generada en el engranaje [10].

Además de la influencia que ejercen los errores de fabricación en los valores de cargas dinámicas, es necesario considerar el efecto que produce la inevitable variación de la rigidez de los pares de dientes engranados, originada por la variación del número de dientes en contacto y la posición ocupada por ellos en la línea práctica del engrane. Según puede ser observado en la figura 2, la rigidez de un par de dientes engranados

varia en dependencia de la zona del contacto [11]. Pero más significativa es la variación de la rigidez cuando es analizado el comportamiento conjunto de los pares de dientes engranados a lo largo de la línea práctica, como es apreciable en la figura 3. Esta variación de la rigidez provoca una influencia significativa en la redistribución no uniforme de la carga sobre los dientes y produce deformaciones abruptas que generan cargas dinámicas apreciables.

La influencia en la carga dinámica de la precisión del engrane y la variación cíclica de la rigidez es considerada en el cálculo del coeficiente de cargas dinámicas mediante los siguientes parámetros adimensionales :

$$B_p = \frac{c \cdot f_{pb\text{eff}}}{F_t \cdot \frac{K_A}{b_e}} \quad (8)$$

$$B_f = \frac{c \cdot f_{t\text{eff}}}{F_t \cdot \frac{K_A}{b_e}} \quad (9)$$

$$B_k = \left| 1 - \frac{c \cdot C_a}{F_t \cdot \frac{K_A}{b_e}} \right| \quad (10)$$

siendo :

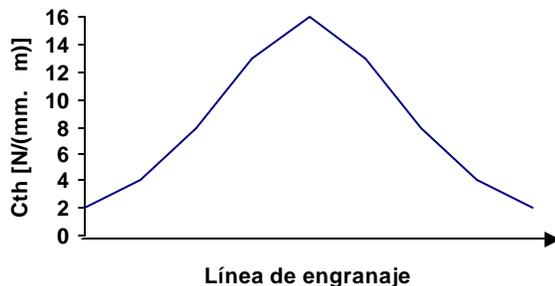
$K_A$  : coeficiente de aplicación de la carga.

$b_e$  : ancho de engrane (mm),

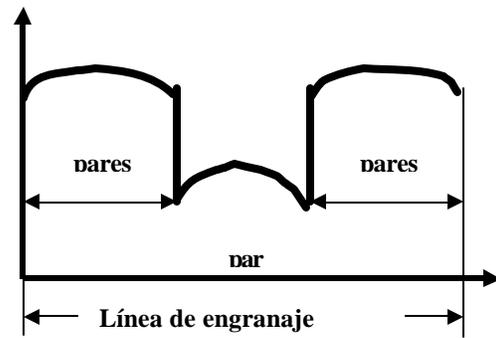
$f_{pb\text{eff}}$  : desviación efectiva del paso básico después del asentado ( $\mu\text{m}$ )

$f_{t\text{eff}}$  : desviación efectiva del perfil del diente después del asentado ( $\mu\text{m}$ )

$C_a$  : cantidad de modificación del perfil en la cresta del diente ( $\mu\text{m}$ ).



**Figura 2** Rigidez de un par de dientes helicoidales ( $z_1 = 53$   $z_2 = 65$   $m = 1,5$   $\beta = 15^\circ$   $x_1 = 0$   $x_2 = -0,08$   $\epsilon_\alpha = 1,7$   $\epsilon_\beta = 1,1$   $F_t/b = 484$  N). [11]



**Figura 3**- Rigidez en un engrane de dientes rectos a lo largo de la línea de engranaje, para  $1,2 \leq \epsilon_\alpha \leq 1,8$ .

En caso de no ser conocidos los valores de desviación efectiva del paso básico y del perfil del diente después de producirse el ajuste funcional, ellos pueden ser estimados mediante las siguientes fórmulas :

$$f_{pb\text{eff}} = f_{pb} - y_p \quad (\mu\text{m}) \quad (11)$$

$$f_{t\text{eff}} = f_{f\alpha} - y_f \quad (\mu\text{m}) \quad (12)$$

siendo:

$f_{pb}$  : desviación del paso básico ( $\mu\text{m}$ ) según ISO 1328-1.

$f_{f\alpha}$  : desviación del perfil ( $\mu\text{m}$ ) según ISO 1328-1.

$y_p$  : asentamiento permisible del paso ( $\mu\text{m}$ ).

$y_f$  : asentamiento permisible del perfil ( $\mu\text{m}$ ).

donde :

Para dureza superficial en el diente:

$$y_p = 0,075 \cdot f_{pb} \quad (\mu\text{m}) \quad (13)$$

$$y_f = 0,075 \cdot f_{f\alpha} \quad (\mu\text{m}) \quad (14)$$

Para dureza volumétrica en el diente

:

$$y_p = \frac{160}{\sigma_{H\text{lim}}} \cdot f_{pb} \quad (\mu\text{m}) \quad (15)$$

$$y_f = \frac{160}{\sigma_{H\text{lim}}} \cdot f_{f\alpha} \quad (\mu\text{m}) \quad (16)$$

siendo

$\sigma_{H\text{lim}}$  : Esfuerzo límite por fatiga superficial del material, para un contacto intermitente (MPa).

### Coefficiente de carga dinámica en régimen subcrítico.

Este régimen es considerado por debajo de la zona de peligro de resonancia. Por seguridad es definida esa zona cuando  $N < 0,85$ , debido a que el cálculo de la razón de resonancia no considera la influencia de la rigidez de otros componentes de la transmisión como son los arboles, rodamientos y carcasa, los cuales influyen en la precisión del cálculo de la resonancia del engranaje.

Es necesario conocer que en este régimen las amplitudes de la vibración pueden ser significativas en valores de razón de resonancia coincidentes con  $N=1/2$  y  $N=1/3$ . Este mismo problema, pero con efectos menos significativos, puede ocurrir con  $N=1/4$  y  $N=1/5$ .

Para la evaluación del coeficiente de carga dinámica en el régimen subcrítico es empleada la siguiente ecuación y los coeficientes de la tabla 2 :

$$K_v = 1 + (C_{V1} \cdot B_p + C_{V2} \cdot B_f + C_{V3} \cdot B_k) \cdot N \quad (17)$$

### Coefficiente de carga dinámica en régimen de resonancia.

Este régimen es caracterizado por una vibración intensa del engranaje, donde las amplitudes provocadas por la resonancia pueden destruir la transmisión, en caso de ser mantenido el trabajo del engranaje durante un tiempo prolongado en esta zona. En este régimen son alcanzados los máximos valores del coeficiente de carga dinámica según puede ser observado en la figura 1. La aproximación a esta zona de resonancia se revela exteriormente por un aumento constante de las vibraciones, por tal motivo, se considera como rango para este régimen aquel que está comprendido entre los valores de razón de resonancia de 0,85 y 1,15

**Tabla 2-** Valores y fórmulas para el cálculo de los factores  $C_v$  de las ecuaciones (17), (18) y (19).

Coefficiente	$1 < \varepsilon_\gamma \leq 2$	$\varepsilon_\gamma > 2$
$C_{V1}$	0,32	0,32
$C_{V2}$	0,34	$0,57 / (\varepsilon_\gamma - 0,3)$
$C_{V3}$	0,23	$0,096 / (\varepsilon_\gamma - 1,56)$
$C_{V4}$	0,90	$(0,57 - 0,05 \cdot \varepsilon_\gamma) / (\varepsilon_\gamma - 1,44)$
$C_{V5}$	0,47	0,47
$C_{V6}$	0,47	$0,12 / (\varepsilon_\gamma - 1,74)$

Nota :  $\varepsilon_\gamma$  : Coeficiente de recubrimiento total =  $\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$

Puede ser calculado el coeficiente de carga dinámica en este régimen mediante la siguiente ecuación y los factores  $C_v$  de la tabla 2:

$$K_v = 1 + (C_{V1} \cdot B_p + C_{V2} \cdot B_f + C_{V4} \cdot B_k) \quad (18)$$

### Coefficiente de carga dinámica en régimen supercrítico.

En este régimen pueden ocurrir picos disminuidos de cargas dinámicas en zonas donde la razón de resonancia sea igual a  $N=2$  ó  $N=3$ . Es necesario tener en consideración, que para algunas transmisiones en este régimen, es importante tomar en cuenta las cargas dinámicas debido a la vibración transversal de otros engranajes y árboles.

En caso de que el efecto de los otros componentes de la transmisión sobre las cargas dinámicas no sea tenido en cuenta, el coeficiente  $K_v$  puede ser valorado mediante la siguiente ecuación :

$$K_v = C_{V5} \cdot B_p + C_{V6} \cdot B_f + C_{V7} \quad (19)$$

La ecuación (19) es aplicable en la zona donde la razón de resonancia toma valores superiores a 1,5. Los factores  $C_{V5}$  y  $C_{V6}$  pueden ser obtenidos de la tabla 2, en cambio el factor  $C_{V7}$  debe ser evaluado como :

$$C_{V7} = 0,75 \quad \text{para } 1 < \varepsilon_\gamma \leq 1,5 \quad (20)$$

$$C_{V7} = 0,875 + 0,125 \cdot \sin[\pi \cdot (\varepsilon_\gamma - 2)] \quad (21)$$

para  $1,5 < \varepsilon_\gamma \leq 2,5$

$$C_{V7} = 1 \quad \text{para } \varepsilon_\gamma > 2,5 \quad (22)$$

### Coefficiente de carga dinámica en régimen intermedio.

Este es un régimen de transición entre el régimen crítico y el supercrítico, por ello el coeficiente de carga dinámica es determinado mediante interpolación lineal entre estos regímenes.

$$K_v = K_{v(N=1,5)} + \frac{(1,5 - N)}{0,35} \cdot [K_{v(N=1,15)} - K_{v(N=1,5)}] \quad (23)$$

### 2.3. Coeficiente de carga dinámica según método C.

La determinación del coeficiente de carga dinámica mediante el método C está basada en el procedimiento brindado por el método B, pero con la introducción de algunas consideraciones simplificadoras como :

Es considerado un régimen subcrítico de resonancia para el engrane.

Se asume que el piñón y la rueda son masas aisladas.

El cálculo orientado es para cargas específicas  $F_t \cdot K_A / b_e \geq 100 \text{ N/mm}$ .

A partir de las consideraciones anteriores, el coeficiente de carga dinámica para engranajes

cilíndricos de dientes rectos o de dientes helicoidales con un coeficiente de recubrimiento axial mayor que 1 ( $\varepsilon_\beta \geq 1$ ), puede ser calculado mediante la siguiente expresión :

$$K_v = 1 + \left[ \frac{K_1}{(F_t \cdot K_A / b_e)} + K_2 \right] \cdot \frac{z_1 \cdot v}{100} \cdot \sqrt{\frac{u^2}{u^2 + 1}} \quad (24)$$

donde:

v : velocidad circunferencial (m/s).

u : razón de engrane.

K1 y K2 : factores de cálculo evaluados según la tabla 3.

Para engranajes cilíndricos con dientes helicoidales y coeficiente de recubrimiento axial menor que 1 ( $\varepsilon_\beta < 1$ ), el valor del coeficiente de carga dinámica es determinado mediante la interpolación lineal del valor de  $K_v$  para dientes rectos y para dientes helicoidales, según la fórmula (25).

$$K_v = K_{v\alpha} - \varepsilon_\beta \cdot (K_{v\alpha} - K_{v\beta}) \quad (25)$$

donde:

$K_{v\alpha}$  : factor dinámico considerando dientes rectos.

$K_{v\beta}$  : factor dinámico considerando dientes helicoidales con  $\varepsilon_\beta \geq 1$ .

$\varepsilon_\beta$  : coeficiente de recubrimiento axial del engranaje analizado.

**Tabla 3-** Valores de los factores K1 y K2 para el cálculo del coeficiente de carga dinámica según el método C.

Tipo de diente	Valores de K1 según el grado de precisión ISO1328-1						Valores de K2 todos
	5	6	7	8	9	10	
Recto	7,5	14,9	26,8	39,1	52,8	76,6	0,0193
Helicoidal	6,7	13,3	23,9	34,8	47,0	68,2	0,0087

### 2.4. Coeficiente de carga dinámica según método D.

Este es un método mucho más simple que el anterior, pero prevé la influencia de menos parámetros y factores en el cálculo del coeficiente de cargas dinámicas. Toma en cuenta las consideraciones del método C, asumiendo que la carga lineal en el diente es de  $F_t \cdot K_A / b_e = 350 \text{ N/mm}$ , un valor aceptado como medio en engranajes industriales. A partir de las anteriores consideraciones la ecuación para el cálculo del coeficiente de carga dinámica es :

$$K_v = 1 + \left( \frac{K_1}{350} + k_2 \right) \cdot \frac{z_1 \cdot v}{100} \cdot \sqrt{\frac{u^2}{u^2 + 1}} \quad (26)$$

### 2.5. Coeficiente de carga dinámica según método E.

El procedimiento de cálculo del coeficiente  $K_v$ , según este método, toma como referencia la norma estadounidense ANSI/AGMA 2001-B88 y fue aceptado con ligeras modificaciones en ISO 6336-1.

El fundamento del cálculo es empírico y conveniente para engranajes industriales de uso general, según

consta en las referencias que sirven de base al método [7].

Este procedimiento no considera las cargas dinámicas producidas en un régimen de resonancia y no debe ser empleado cuando la frecuencia de rotación del piñón exceda el 80% de su frecuencia de resonancia.

Para el cálculo del coeficiente de carga dinámica es empleada la siguiente ecuación :

$$K_v = \left[ \frac{A}{A + \sqrt{200 \cdot v}} \right]^{-B} \quad (27)$$

donde :

$$A = 50 + 56 \cdot (1 - B) \quad (28)$$

$$B = 0,25 \cdot (C - 5)^{0,667} \quad (29)$$

siendo :

C : grado de precisión según ISO 1328-1

v : velocidad circunferencial (m/s).

### 3. Comparación de los diferentes métodos de cálculo del coeficiente de carga dinámica $K_v$ .

Con el objetivo de realizar una comparación, entre los diferentes procedimientos normados en ISO 6336-1, fueron calculados los factores  $K_v$  para engranajes en los cuales fueron determinados experimentalmente estos valores, según se describen en los artículos de los profesores japoneses Kubo [13, 14] e Ichimaru [15].

**Tabla 4.** Parámetros geométricos de los engranajes empleados en los ensayos de Kubo e Ichimaru.

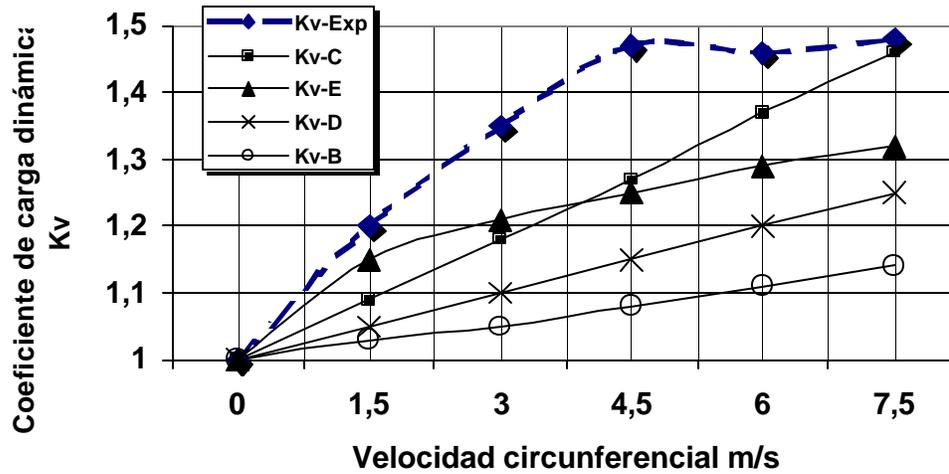
Parámetros del engranaje	unidades	símbolos	Kubo	Ichimaru
Módulo normal	mm	m	3	6
Número de dientes	-	z	24 / 36	26 / 26
Distancia entre centros	mm	$a_w$	90	156
Ancho de engranaje	mm	b	10	10
Ángulo de la hélice	°	$\beta$	0	0
Ángulo de la cremallera de referencia	°	$\alpha$	20	20
Factor de altura del diente	-	$h_a^*$	1.0	1.0
Factor de holgura radial	-	$c^*$	0.25	0.25
Coefficiente de corrección	-	$x_1 / x_2$	0 / 0	0 / 0
Tipo de ruedas	-	-	macizas	macizas

Durante los ensayos de Kubo los dientes del engranaje fueron cargados moderadamente con una carga lineal entre 93 N/mm y 185 N/mm, en cambio las ruedas empleadas en los experimentos de Ichimaru soportaron cargas altas en los flancos de los dientes del orden de 420 N/mm, en este último caso los dientes fueron cementados y rectificadas alcanzando el engranaje un grado de precisión ISO-6. Las velocidades máximas de las ruedas durante las experiencias fueron de 30,0 m/s, en el caso de los ensayos de Ichimaru, y de 7,0 m/s en las pruebas de Kubo.

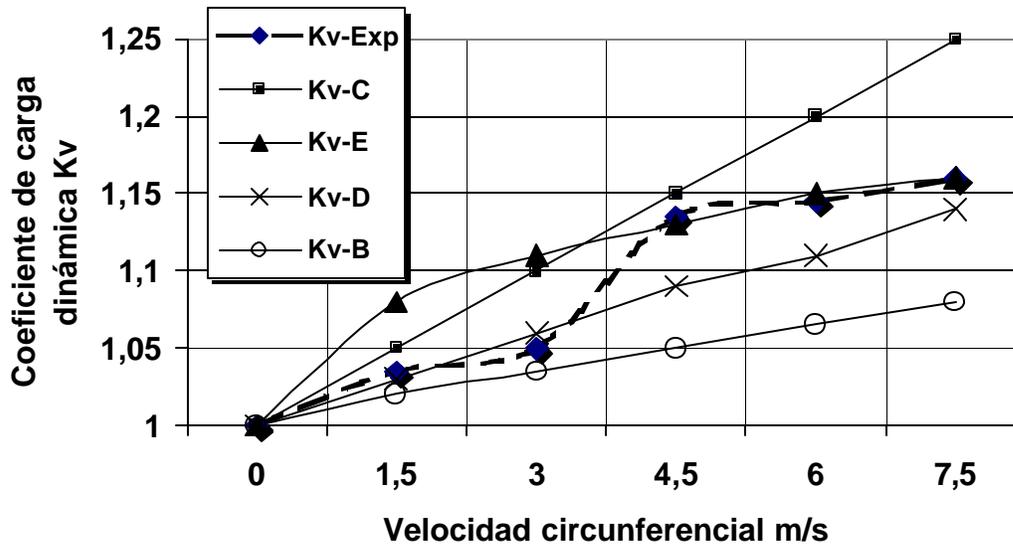
Ichimaru en sus ensayos fue capaz de obtener los valores del coeficiente de carga dinámica en los

regímenes subcríticos y de resonancia. Según las amplitudes de las vibraciones fue estimada la resonancia principal a  $3700 \text{ min}^{-1}$ . Los puntos de resonancia secundaria ( $N=1/2$ ) y terciaria ( $N=1/3$ ) fueron observados en las velocidades de  $1800 \text{ min}^{-1}$  y  $1200 \text{ min}^{-1}$  respectivamente.

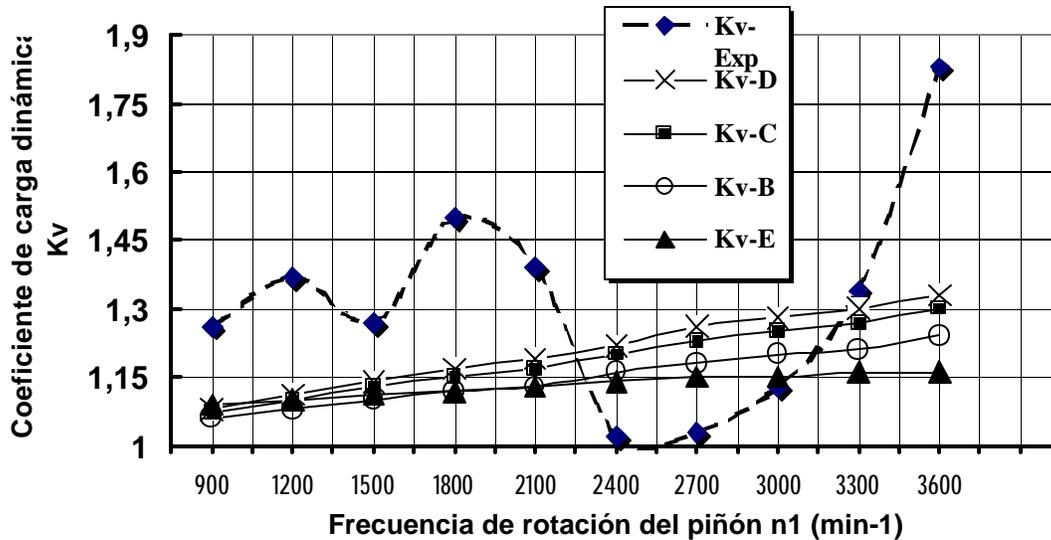
Empleando los métodos de cálculo B,C,D y E del factor  $K_v$  fue elaborado un programa de computación que permitió evaluar el coeficiente de carga dinámica para las condiciones de trabajo establecidas y las ruedas dentadas empleadas en los ensayos de Kubo e Ichimaru. En las figuras 4, 5 y 6 son mostrados los resultados obtenidos.



**Figura 4.-** Valores del coeficiente de carga dinámica  $K_v$  en dependencia de la velocidad circular  $V$  de las ruedas, calculados según los métodos B ( $K_v$ -B), C ( $K_v$ -C), D ( $K_v$ -D) y E ( $K_v$ -E) de ISO 6336-1 y los obtenidos en los ensayos de Kubo ( $K_v$ -Exp), en un engranaje cilíndrico de precisión ISO-9 con una carga en sus dientes de 185 N/mm.



**Figura 5.-** Valores del coeficiente de carga dinámica  $K_v$  en dependencia de la velocidad circular  $V$  de las ruedas, calculados según los métodos B ( $K_v$ -B), C ( $K_v$ -C), D ( $K_v$ -D) y E ( $K_v$ -E) de ISO 6336-1 y los obtenidos en los ensayos de Kubo ( $K_v$ -Exp), en un engranaje cilíndrico de grado de precisión ISO 7 con cargas en sus dientes de 185 N/mm.



**Figura 6.-** Valores del coeficiente de carga dinámica  $K_v$  en dependencia de la frecuencia de rotación del piñón, calculados según los métodos B ( $K_v$ -B), C ( $K_v$ -C), D ( $K_v$ -D) y E ( $K_v$ -E) de ISO 6336-1 y los obtenidos en los ensayos de Ichimuro ( $K_v$ -Exp), en un engranaje cilíndrico de precisión ISO-6 con una carga en sus dientes de 420 N/mm.

#### **Conclusiones de las figuras 4 y 5:**

Analizando las figuras 4 y 5 se observa que el método B proporciona valores pequeños del coeficiente  $K_v$  y los valores mayores son obtenidos con los métodos C y E. Con excepción del método E, el resto de los métodos de cálculo analítico otorgan un comportamiento lineal al coeficiente de carga dinámica en dependencia de la velocidad circunferencial de las ruedas. En el caso de los métodos B, C y D la influencia del grado de precisión del engranaje es observada por una variación de la pendiente de la recta, siendo más notable este efecto en el método C.

En correspondencia con los ensayos de Kubo y los resultados obtenidos al evaluar los diferentes métodos de cálculo de  $K_v$ , se observa que en los engranajes de baja precisión (ISO-9) el método C brinda resultados prácticamente aceptables, en cambio para engranajes con buena precisión (ISO-7) los métodos D y E pueden ser convenientes.

#### **Conclusiones de la figura 6:**

Estudiando los resultados de la figura 6, se comprende que el método de cálculo del factor  $K_v$ , según el procedimiento B de ISO, no refleja una buena coincidencia con los diferentes valores obtenidos en los ensayos de Ichimaru, principalmente en el régimen de resonancia principal ( $N_{EXP} = 1$ ) y sus parciales ( $N_{EXP} = 1/3$  y  $N_{EXP} = 1/2$ ).

Este resultado en gran medida, es producto de no ser precisada con exactitud la frecuencia de rotación del

piñón en el régimen de resonancia principal del engranaje. En el caso de los ensayos de Ichimaru fue observado el régimen de resonancia principal en el engranaje a una frecuencia de rotación del piñón de  $3700 \text{ min}^{-1}$ , en cambio, según el método B de ISO este valor debería ser próximo a  $6630 \text{ min}^{-1}$ .

Debido a la incompatibilidad de los resultados en el régimen de resonancia principal y sus parciales, los valores del coeficiente de carga dinámica calculados por los procedimientos normados resultaron menores, con valores entre el 63,4% y el 72,7% de los obtenidos por Ichimaru en sus ensayos, y en las frecuencias de resonancia secundaria y terciaria este rango tuvo valores promedios del 76% y el 80% respectivamente.

En cambio, fue observado que durante el régimen subcrítico y con una frecuencia de rotación del piñón mayor que la de resonancia secundaria, los valores del coeficiente  $K_v$ , obtenidos según los diferentes métodos, fueron algo mayores que los experimentales, con un valores promedios superiores al 13%. Fuera de los puntos de resonancia secundaria, las magnitudes de  $K_v$  presentaron un comportamiento aceptable según los métodos B y E de la norma ISO 6336-1.

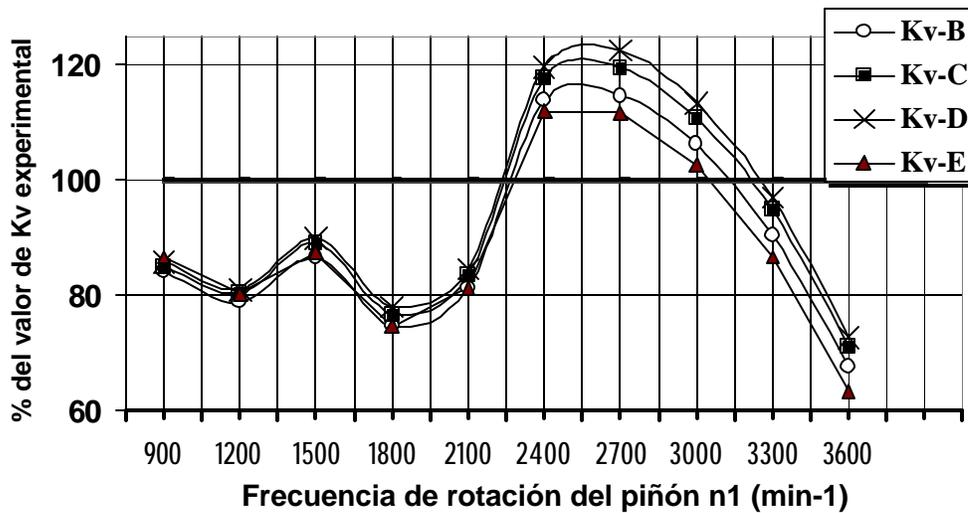
Debe ser notado, que de aplicarse el procedimiento de cálculo de  $K_v$ -B, admitiendo que el engranaje trabaja en el régimen de resonancia (fórmula 19), se obtendría un valor de  $K_v = 2,047$ , algo mayor que el valor  $K_v = 1,830$  obtenido en los ensayos de Ichimaru, pero prácticamente aceptable con una diferencia de 11,8%.

**Tabla 5.** – Razón de resonancia N, calculada según el método B de ISO ( $N_{ISO}$ ) y los obtenidos en el ensayo de Ichimaru ( $N_{EXP}$ ), en dependencia de la frecuencia de rotación del piñón  $n_1$  y correspondiente a la velocidad circunferencial V de las ruedas.

$n_1$ ( $\text{min}^{-1}$ )	900	1200	1385	1565	1800	2000	2400	2769	3000	3272	3600
V (m/s)	7,3	9,8	11,3	12,8	14,7	16,3	19,6	22,6	24,5	26,7	29,4
Valores de la razón de resonancia según Ichimaru ( $N_{Exp}$ ) e ISO ( $N_{ISO}$ )											
$N_{Exp}$	1/4.0	1/3.0	1/2.6	1/2.3	1/2.0	1/1.8	1/1.5	1/1.3	1/1.2	1/1.1	1/1
$N_{ISO}$	1/7.4	1/5.5	1/4.8	1/4.2	1/3.7	1/3.3	1/2.8	1/2.4	1/2.2	1/2.0	1/1.8

**Tabla 6.**– Frecuencia de rotación del piñón en el régimen de resonancia principal del engranaje empleado por Ichimaru, según el método B de ISO

Parámetros geométricos del engranaje ensayado por Ichimaru, calculados según los datos de la tabla 4: Diámetros de referencia $d_1 = d_2 = 156,0$ mm      Diámetros de fondo $d_{f1} = d_{f2} = 141,0$ mm Diámetros básicos $d_{b1} = d_{b2} = 146,6$ mm      Diámetros de cresta $d_{a1} = d_{a2} = 168,0$ mm Coeficiente de recubrimiento $\epsilon_\alpha = 1,62$
Momento polar de inercia por unidad de ancho: $\rho = 7,83 \cdot 10^{-6}$ Kg/mm <sup>3</sup> $I^* = \frac{\pi}{2} \cdot \rho \cdot \left(\frac{d_{a1}}{2}\right)^4 = \frac{\pi}{2} \cdot (7,83 \cdot 10^{-6}) \cdot \left(\frac{168}{2}\right)^2 = 612,34$ Kg.mm
Masa de las ruedas por unidad de ancho reducida sobre la línea de engranaje: $m_{red} = \frac{2 \cdot I^*}{d_b^2} = \frac{2 \cdot 612,34}{146,6^2} = 0,05699$ Kg / mm
Rigidez teórica de un par de dientes engranados: $c_{th}' = C_1 + \frac{C_2}{z_1} + \frac{C_3}{z_2} = 0,047234 + \frac{0,15551}{26} + \frac{0,25791}{26} = 15,840$ N/(mm.µm)
Rigidez de un par de dientes engranados: $C_R = 1$ Ruedas macizas. $C_B = 1$ Cremallera básica de referencia según ISO 53 $c' = 0,8 \cdot c_{th}' \cdot C_R \cdot C_B \cdot \cos \beta = 0,8 \cdot 15,840 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 12,672$ N/(mm.µm)
Rigidez media del engrane: $c_\gamma = c' \cdot (0,75 \cdot \epsilon_\alpha + 0,25) = 12,672 \cdot (0,75 \cdot 1,62 + 0,25) = 18,564$ N/(mm.µm)
Frecuencia de resonancia principal del piñón: $n_{E1} = \frac{30000}{\pi \cdot z_1} \cdot \sqrt{\frac{c_\gamma}{m_{red}}} = \frac{30000}{\pi \cdot 26} \cdot \sqrt{\frac{18,564}{0,05699}} = 6630$ min-1



**Figura 7.-** Valores del coeficiente de carga dinámica  $K_{vISO}$ , según los métodos B, C, D y E, en por cientos del valor del coeficiente experimental  $K_{vExp}$ .

#### 4. Conclusiones

Luego del estudio realizado pueden ser brindadas las siguientes conclusiones:

A pesar de los muchos esfuerzos realizados para lograr una evaluación precisa del coeficiente de cargas dinámicas, aún existen discrepancias entre los diferentes procedimientos y los resultados que se obtienen a partir de los métodos de cálculo del coeficiente Kv. Guiándose por diferentes metodologías de cálculo analítico se pueden obtener, para un mismo engranaje e iguales condiciones de explotación, valores del coeficiente Kv con diferencias entre un 20% y un 36%, las mayores discrepancias son para engranajes de poca precisión.

El modelo empleado para la determinación de la frecuencia de resonancia natural del engranaje no parece ser suficiente para precisar con exactitud las características del sistema de transmisión que permitan evaluar con una aproximación práctica los valores del coeficiente de carga dinámica en el régimen de resonancia principal y los puntos de resonancia secundaria en el régimen subcrítico.

El método C brinda resultados prácticamente aceptables para calcular el coeficiente Kv en engranajes cilíndricos de poca precisión (ISO-9) y dientes con carga en la línea de contacto entre 90 N/mm y 185 N/mm. En cambio para iguales condiciones de carga, pero engranajes de buena precisión (ISO-7) los métodos D y E pueden ser convenientes.

Los métodos B y E permiten un cálculo aceptable del coeficiente Kv para engranajes cilíndricos de elevada precisión (ISO-6) y dientes con carga cercana a los 400 N/mm, que trabajan en la zona subcrítica y fuera de los puntos de resonancia secundaria.

Al parecer la realización de ensayos (método A) es la única evaluación que permite precisar un valor del coeficiente Kv. Pero la realización de estas evaluaciones es una tarea difícil con mucho gasto en tiempo y en recursos, por lo tanto, solo se justifica en determinados casos y cuando no se está en presencia de un nuevo diseño. Por ello, contar con un método de cálculo seguro, pero no muy conservador, para el cálculo del coeficiente de carga dinámica es una de las tareas que se proponen muchos de los estudiosos de la dinámica de los engranajes.

#### 5. Bibliografía.

- 1.- International Standard ISO 6336, "Calculation of Load Capacity of Spur and Helical Gears", International Organization for Standardization (1996).
- 2.- E. Buckingham, "Dynamic Loads on Gear Teeth", ASME Research Publication, New York (1931).
- 3.- W.A.Tuplin, "Gear Tooth Stress at High Speeds", Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, Vol 163, pag. 162, London (1950).
- 4.- W.A.Tuplin, "Dynamic Loads on Gear Teeth", Proceedings of International Conference on Gearing, Institution of Mechanical Engineers, pag. 24-42, London (1958).

G. Niemann, H. Retting, "Cargas dinámicas en los dientes de engranajes" (en alemán), *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, Vol 99, pag.89-96, Alemania (1957).

Norma DIN 3990, "Cálculo de la capacidad de carga de engranajes cilíndricos de dientes rectos y helicoidales" (en alemán). Deutsches Institut für Normung, Alemania (1981).

AGMA Standard 2001-B88, "Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gears", American Gear Manufacturers Association, Alexandria (1988),

B. Hohn, "Calculation of the Mean Value of Mesh Stiffness", Documento 690 en ISO/TC60/SC2/WG6, FZG, Munich (1997).

International Standard ISO 53, "Cylindrical Gears. ISO System of Accuracy", International Organization for Standardization (1995).

A. Seireg, D. Houser, "Evaluation of Dynamic Factors for Spur and Helical Gears" Transactions of the ASME, *Journal of Engineering for Industry*, pag. 504-515, Mayo 1970.

Z.Jaskiewicz, A. Wasiewski, "Engranajes Cilíndricos" Tomo I (en polaco), pag.245, Varsovia (1992).

International Standard ISO 1328-1, "Cylindrical Gears. ISO System of Accuracy", International Organization for Standardization (1995).

A. Kubo, "Examination of the Dynamic Factor  $K_v$ ", Kyoto University (1980),

D.McVittie, "Recommend Dynamic Factor for ISO/CD 9085-1 & 2", Documento 547 en ISO/TC60/SC2/WG6 (1994).

K.Ichimarú, F. Hirano, "Dynamic Behavior of Heavy-Loaded Spur Gears", *Journal of Engineering for Industry*, pag. 373-381, ASME, Mayo (1974).

---

## Calculation of internal dynamic load on cylindrical gears with external contact.

### Abstract:

Five different methods of calculation procedures of the dynamic factor  $K_v$  on cylindrical gears is exposed in this paper, taking into account the International Standard ISO 6336:96. In order to analyze consistence and limit of application of ISO methods for  $K_v$ , they are confronted with some experimental results.

**Key words:** cylindrical gear, dynamic load, ISO Standard, dynamic factor.