

# Estudio de la influencia de parámetros geométricos en la resistencia de superficies de revolución sometidas a presión externa.

## V. González Fernández.

Departamento de Mecánica Aplicada  
Instituto Superior Politécnico *José Antonio Echeverría*.  
Calle 114 esq. 127, Marianao 15, Ciudad de la Habana, Cuba  
Teléfono: (537) 260 2267 Fax: (537) 267 1208  
E-mail: [vladimir@mecanica.ispjae.edu.cu](mailto:vladimir@mecanica.ispjae.edu.cu)

(Recibido el 14 de diciembre del 2000, aceptado el 18 de marzo del 2001)

### Resumen

Este trabajo se inserta en el desarrollo de los proyectos de estructuras cilíndricas presurizadas, evaluando y complementando los recursos existentes para el proyecto de superficies de revolución sometidas a presión externa y considerando las formulaciones analíticas que toman en cuenta los comportamientos no lineales, tanto geométrico como físico, importantes cuando se desea verificar el colapso de este tipo de estructuras.

Con este trabajo se pretende la aplicación de métodos probabilísticos de análisis de resistencia al caso de estructuras en forma de superficies de revolución sometidas a presión externa. Para cumplir este objetivo serán determinadas las cargas críticas con la formación de lóbulos circunferenciales según la teoría de Reynolds, tomando en consideración las variaciones de algunos parámetros geométricos que influyen en esta carga.

**Palabras claves:** Estructura, estabilidad, falla estructural, imperfección geométrica, superficie a presión.

## 1. Introducción.

En los cálculos de resistencia de estructuras son aplicados métodos determinísticos o métodos probabilísticos. En el primer caso las magnitudes relacionadas con la verificación de la seguridad son consideradas determinísticas, quedando todas las imprecisiones implícitas en un coeficiente de seguridad. Entre esos métodos se encuentran:

- Método de esfuerzos admisibles, donde el estado tensional en el punto más solicitado del componente está suficientemente alejado del estado tensional que caracteriza la resistencia del material, este alejamiento es evaluado por un coeficiente de seguridad siempre mayor que la unidad.
- Método de estados límites, que analiza el caso en que un componente o estructura deja de cumplir cualquiera de sus finalidades de construcción alcanzando el estado límite.

Los últimos estados límites corresponden al agotamiento de la capacidad de resistencia del elemento.

Los estados límites de utilización corresponden a exigencias funcionales y de durabilidad del componente. Los

coeficientes de seguridad relacionan la carga aplicada con la carga que llevaría a la estructura a un estado límite (el coeficiente de seguridad está asociado a una probabilidad de falla, la cual a su vez se vincula al sistema de cargas y dimensiones).

En el segundo caso, métodos probabilísticos, las magnitudes tomadas en cuenta en el análisis de la seguridad de la estructura son tratadas probabilísticamente, aunque el comportamiento mecánico-estructural sea considerado determinísticamente.

## 2. Análisis de la estructura.

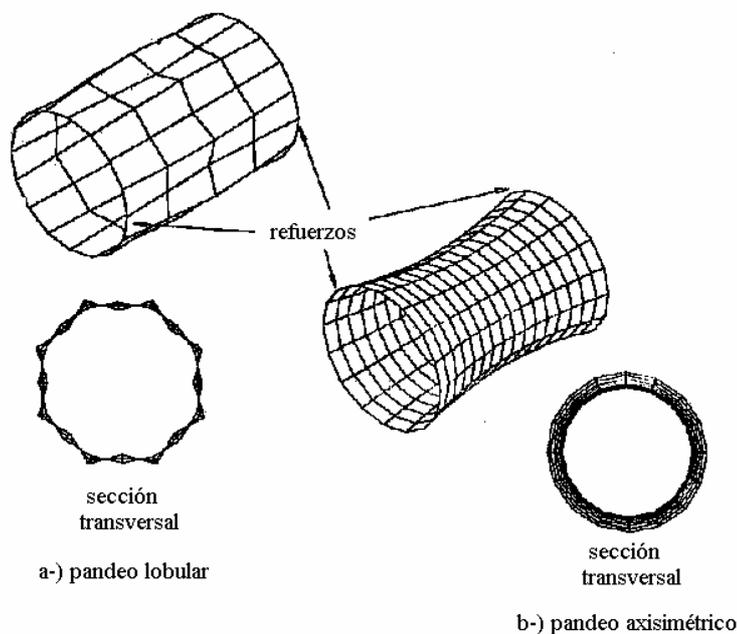
Trabajando con las cargas y la geometría se busca la probabilidad mínima de fallo, o sea, la posibilidad mínima de que la sollicitación supere la resistencia. Serán aplicados en el cálculo los métodos de estado límite, o sea la estructura al alcanzar la carga crítica deja de cumplir su finalidad de construcción, por haber alcanzado el estado límite y agotar su capacidad de resistencia.

Entre los parámetros que influyen en este valor de carga crítica, serán considerados el espesor de la superficie y el espaciamiento entre refuerzos. Adicionalmente, en ambos

parámetros geométricos serán analizadas posibles imperfecciones en la estructura.

En el caso de una estructura cilíndrica con refuerzos es recomendable analizar el colapso del casco entre refuerzos

con la formación de lóbulos circunferenciales (pandeo lobular) como se muestra en la figura 1a, y sin la formación de lóbulos circunferenciales (pandeo axisimétrico) como se muestra en la figura 1b.



**Figura 1.** Colapso del casco entre refuerzos.

Se considera que la presión de colapso del casco entre refuerzos será la menor entre las presiones críticas obtenidas para las dos posibilidades, o sea;

$$P_{col} = \min[(P_{col})_{lob}, (P_{col})_{axiss}] \quad (1)$$

El caso de pandeo lobular será analizado utilizando la teoría de Reynolds[1] en la forma siguiente: La pérdida de estabilidad inelástica del casco entre refuerzos, está dada por:

$$P_{cr}^i = P_{cr}^{\bullet} \frac{1-v^2}{1-v_p^2} \left[ \frac{E_t}{E} \left( 1 - \frac{3\phi}{4} \right) + \frac{E_{\bullet}}{E} \frac{3\phi}{4} \right] \quad (2)$$

con:

$$P_{cr}^{\bullet} = \frac{2\pi^2 EF}{3\phi(1-v^2)} \left( \frac{t}{R} \right)^2 \frac{Rt}{L^2} \frac{1}{3-2\phi(1-F)} \quad (3)$$

donde:

$P_{cr}^i$  : presión de pandeo lobular inelástico del casco, entre refuerzos.

$P_{cr}^{\bullet}$  : presión de pandeo lobular elástico del casco, entre refuerzos.

$$v_p = \frac{1}{2} - \frac{E_{\bullet}}{E} \left( \frac{1}{2} - v \right)$$

$$\phi = 1.23 \frac{\sqrt{Rt}}{L} \quad (4)$$

$$F = \frac{\sigma_{mx}}{\sigma_{m\theta}}$$

con:

$\sigma_{mx}$  : esfuerzo normal longitudinal de membrana, del casco, en el centro del espacio entre refuerzos, conforme Pulos y Salerno [2]

$\sigma_{m\theta}$  : esfuerzo normal circunferencial de membrana, del casco, en el centro del espacio entre refuerzos, conforme Pulos y Salerno [2]

Los esfuerzos  $\sigma_{mx}$  e  $\sigma_{m\theta}$  son calculados según la teoría de Pulos y Salerno [2]. Las distribuciones esquemáticas de los esfuerzos en el casco, incluyendo membrana y flexión, son presentadas en la figura 2.

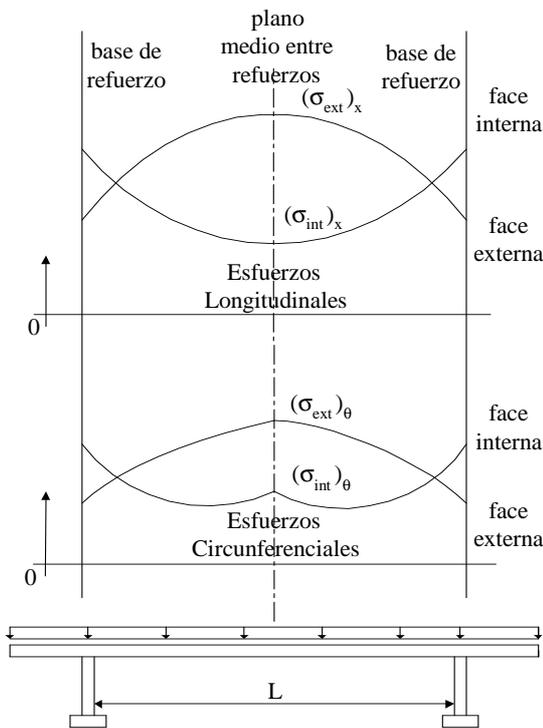


Figura 2. Esfuerzos en el casco (membrana + flexión).

Esta teoría, tiene en relación con las teorías de Von Sander y Gunter [3] y de Wilson [4], la ventaja de considerar los efectos no lineales causados por la fuerza axial  $N_x$  de compresión, según se muestra en la figura 3.

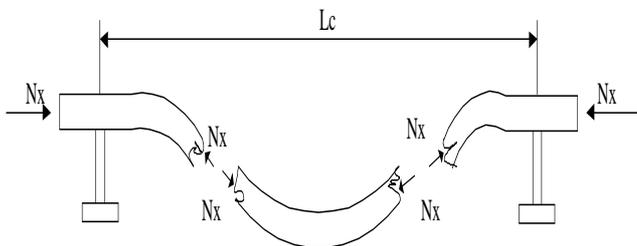


Figura 3. Componente radial de  $N_x$  debido a su inclinación por la flexión del casco.

En la interpretación de los métodos probabilísticos son tomados en consideración los aspectos siguientes.

RESISTENCIA  $\{f_R(R)\}$  función densidad de probabilidad de la resistencia mecánica.

SOLICITACIÓN  $\{f_S(S)\}$  función densidad de probabilidad de la sollicitación mecánica.

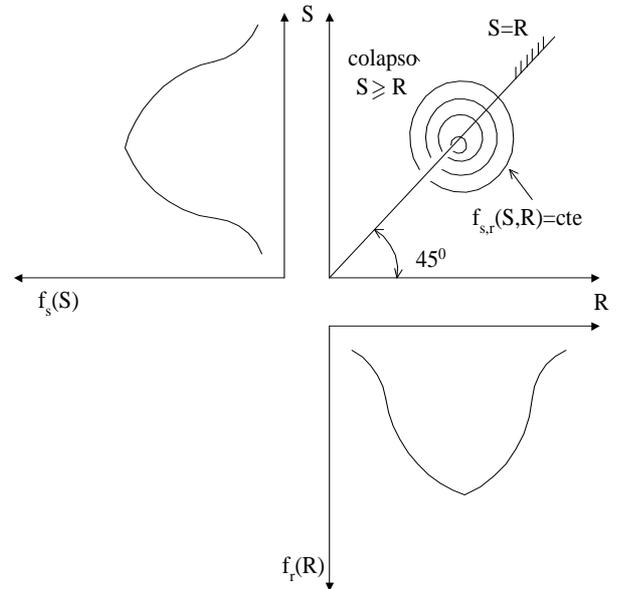


Figura 4. Representación gráfica del cálculo de la probabilidad de colapso

$$P_{col} = P[R \leq S] \tag{5}$$

El valor mínimo de la integral en la región indicada de la función densidad de probabilidad conjunta es igual a la probabilidad de colapso.

$$P_{col} = P[G(R, S) \leq 0], (G: \text{función de estado límite}) \tag{6}$$

$$P_{col} = P(R - S \leq 0) = \int_0^\infty \left[ \int_0^n f_R(\epsilon) d\epsilon \right] f_S(n) dn \tag{7}$$

En la solución de este trabajo fue aplicado el método directo, para lo cual se buscó una función de estado límite (función determinística) y fueron determinadas las funciones densidad de probabilidad de las variables aleatorias. Conocidas estas distribuciones, fueron aplicadas en la función determinística para obtener la función densidad de probabilidad de la presión de colapso, o sea, conocido un conjunto de funciones probabilísticas y una relación determinística clara entre ellas, es posible calcular la función densidad de probabilidad de la variable dependiente, una vez conocidas las funciones densidad de probabilidad de las variables independientes.

La figura 5 es un esquema de la estructura analizada. Se muestra un espaciado entre refuerzos, repitiéndose esta geometría para ambos lados, hasta los extremos cerrados. Por la repetición de la estructura para esta carga, los planos  $S_1-S_1$  y  $S_2-S_2$  pueden ser considerados como planos de simetría, y el modelo que será analizado corresponde a la región comprendida entre esos dos planos.

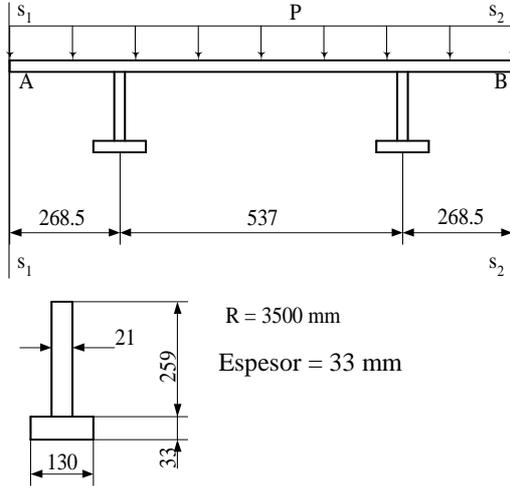


Figura 5. Cilindro reforzado con anillos internos y presión externa.

### 3. Variaciones del espesor del casco.

En este caso, partiendo de la configuración anterior son dadas variaciones al valor de espesor y determinada la presión crítica, según lo indicado en la tabla 1. Para esto ha sido empleada la norma ASTM [5] (1991) de los parámetros de producción de chapas para aceros estructurales y reforzados para recipientes a presión y líneas de ferrocarril, con espesores entre 32 y 35 mm de ancho y longitud entre 2400 y 2700 mm: la variación admisible del espesor de la chapa es de hasta 1.5 mm.

Tabla 1. Espesor del casco y presión crítica

Espesor. (mm)	Presión crítica. (MPa)
31.5	7.765
31.8	7.841
32.2	7.938
32.6	8.035
32.8	8.095
33.0	8.131
33.2	8.195
33.4	8.226
33.8	8.379
34.2	8.490
34.5	8.578

Los resultados del cálculo de la presión crítica fueron obtenidos con la aplicación de teoría de Reynolds [1]. Para esos valores fue determinada la función de estado límite de la presión crítica considerando el espesor como una variable aleatoria. Los resultados se presentan en la figura 6.

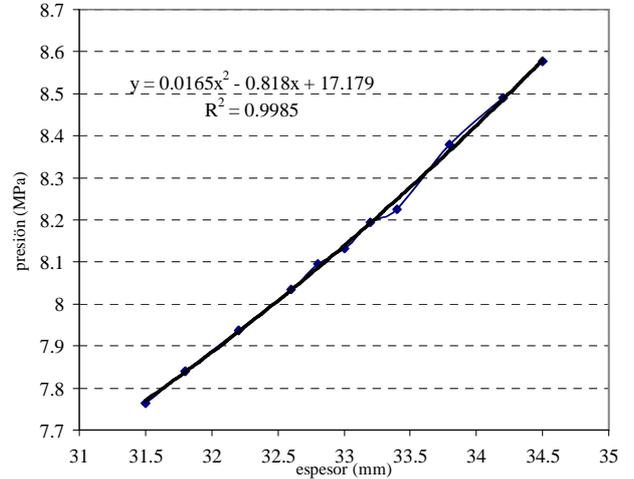


Figura 6. Comportamiento de la presión de colapso vs. espesor del casco

$$P_{col} = 0.0165\delta^2 - 0.818\delta + 17.179 \quad (8)$$

A continuación se muestra la función inversa

$$\delta = 24.7878 + 7.7849\sqrt{P_{col} - 7.0478} \quad (9)$$

Para la determinación de la función probabilidad de la presión de colapso se aplica la formulación siguiente.

$$f_{P_{col}}(p) = f_{\Delta}(\delta) \left| \frac{d\delta}{dP_{col}} \right| \quad (10)$$

Siendo;

$$Pr ob[P_{col} < p] = \int_0^p f_{P_{col}}(p) dp \quad (11)$$

En el caso del espesor del casco fue considerada una distribución normal con los siguientes parámetros (99.7% de la distribución,  $3\sigma=1.5$ ,  $\sigma=0.5$  mm) [6].

$$\begin{aligned} \text{media } \mu &= 33 \text{ mm} \\ \sigma &= 0.5 \text{ mm} \end{aligned}$$

Siendo el resultado final;

$$f_{P_{col}}(p) = 0.7979 \exp\left(-2(\delta - 33)^2\right) \left| \frac{3.8975}{\sqrt{P_{col} - 7.0478}} \right| \quad (12)$$

En las figuras 7 y 8 son presentadas las funciones densidad de probabilidad del espesor del casco y la función

probabilidad acumulada de la presión de colapso con variación del espesor del casco.

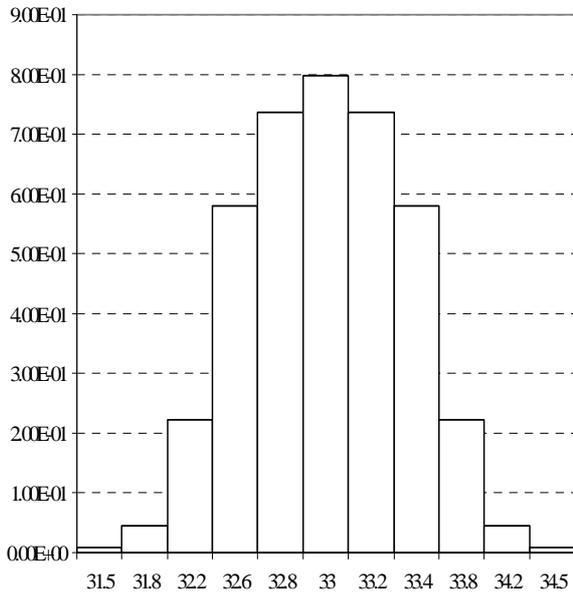


Figura 7. Función densidad de probabilidad del espesor del casco.

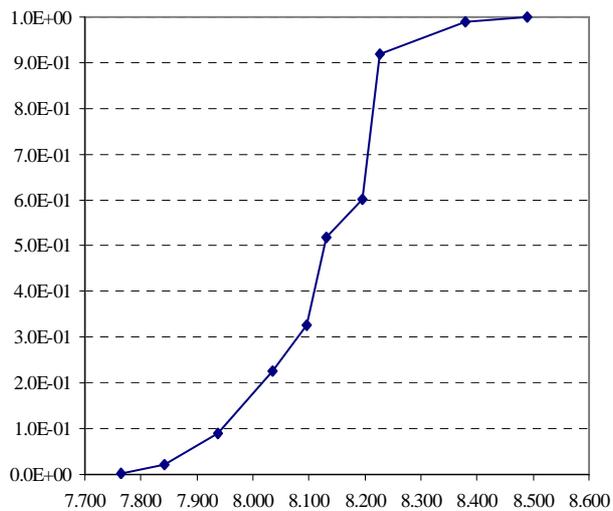


Figura 8. Función de probabilidad acumulada de la presión de colapso con variación del espesor del casco.

En el caso estudiado, la presión de colapso para la cual es proyectado el casco es 8 MPa, con coeficiente de seguridad 2 según los criterios de proyecto, quedando la presión de operación en 4 MPa. La probabilidad de que la presión de colapso sea menor que la presión de proyecto, según la figura 8, es de aproximadamente 20%. Esa presión podría ser de aproximadamente 7.8 MPa lo que implicaría una pérdida de 0.2 MPa de presión con relación a los valores de proyecto, que en el caso de estructuras sumergibles pudiera representar una pérdida de 20 m de profundidad.

#### 4. Variaciones del espaciamiento entre refuerzos.

El procedimiento de análisis en este caso fue similar al anterior por lo cual solo son presentados los resultados obtenidos. Partiendo de la configuración ya mostrada, son introducidas variaciones al valor de espaciamiento entre refuerzos y presión crítica según se indica en la tabla 2.

Tabla 2. Espaciamiento entre refuerzos y presión crítica.

Espaciamientos (mm)	Presión (MPa)
487	8.359
497	8.303
507	8.247
517	8.191
527	8.150
537	8.131
547	8.055
557	7.995
567	7.932
577	7.868
587	7.804

Los resultados del cálculo de la presión crítica obtenidos también con la utilización de la teoría de Reynolds [1], considerando el espaciamiento entre refuerzos como una variable aleatoria, son mostrados en la figura 9.

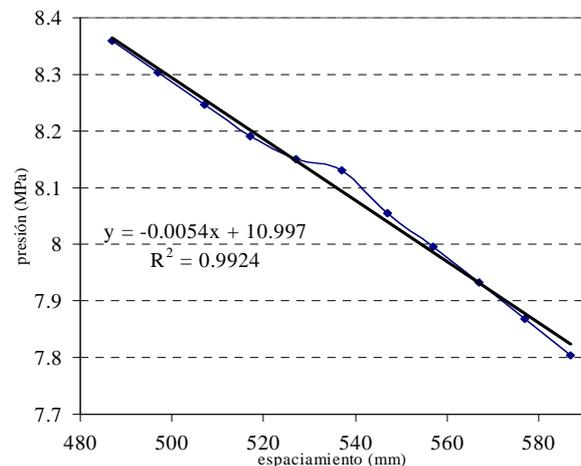


Figura 9. Comportamiento de la presión crítica vs. espaciamiento entre refuerzos.

$$P_{col} = -0.0054L_C + 10.997 \tag{13}$$

A continuación se muestra la función inversa:

$$L_c = \frac{10.997 - P_{col}}{0.0054} \quad (14)$$

$$\frac{dL_c}{dP_{col}} = -\frac{1}{0.0054} \quad (15)$$

Para el espaciamiento entre refuerzos fue considerada una distribución normal con los parámetros siguientes [6,7]:

$$\begin{aligned} \text{media } \mu &= 537 \text{ mm} \\ \sigma &= 5 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$f_{P_{col}}(p) = 0.0798 \exp\left(-2e - 2(lc - 537)^2\right) \cdot \frac{1}{.0054} \quad (16)$$

En las figuras 10 y 11 son presentadas las funciones densidad de probabilidad del espaciamiento entre refuerzos y la función de probabilidad acumulada de la presión crítica con variación del espaciamiento entre refuerzos.

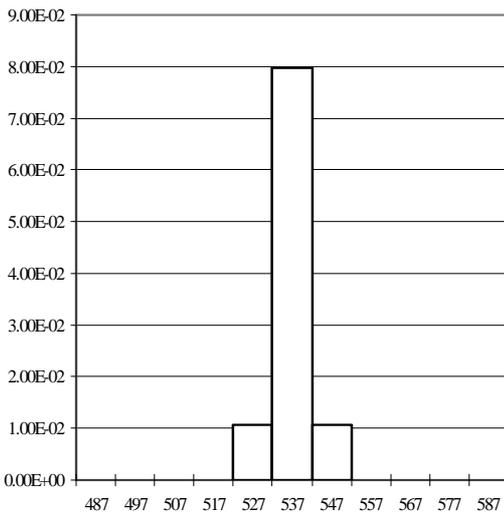


Figura 10. Función densidad de probabilidad del espaciamiento entre refuerzos.

Para este otro caso, la presión de colapso para la cual es proyectado el casco continúa siendo 8 MPa, con coeficiente de seguridad 2, según los criterios de proyecto, y la presión de operación 4 MPa. La probabilidad de que la presión de colapso sea menor que la presión de proyecto es menor del 10% (ver figura 11). Del análisis de este parámetro se percibe que su influencia es mucho menor que la de los errores geométricos admisibles en la medición del espaciamiento entre refuerzos y van a tener menos influencia que los errores de fabricación propios de la producción de las chapas de acero laminado utilizadas en la construcción de estos cascos o superficies de revolución sometidos a presión.

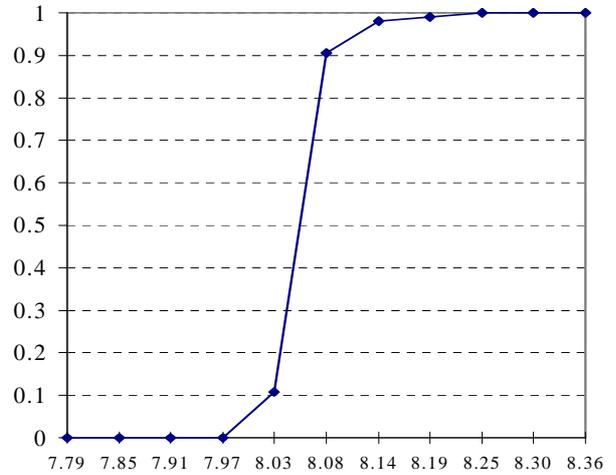


Figura 11. Función de probabilidad acumulada de la presión crítica con variación del espaciamiento entre refuerzos

### 5. Conclusiones.

De acuerdo a los objetivos propuestos, y los resultados de la presente investigación son posibles las siguientes conclusiones:

1. Errores geométricos, de fabricación o de producción en los componentes de estas estructuras pueden modificar los valores de la carga crítica.
2. De los parámetros estudiados, las variaciones del espesor de la chapa presentan mayor influencia.
3. La influencia de las variaciones del espaciamiento entre refuerzos, consideradas como errores de fabricación, es mínima si se compara con las variaciones del espesor de las planchas.
4. En el caso del espesor, considerando las tolerancias admisibles en el proceso de producción de la chapa según las normas, pueden ocurrir variaciones considerables de los valores de presión crítica .
5. Los valores de coeficiente de seguridad utilizados en este tipo de cálculo estructural, de acuerdo con los criterios de proyecto, consiguen que los valores de la presión de operación se mantengan lo suficientemente alejados de los valores límites.

## 6. Bibliografía.

1. Reynolds, T. E. Inelastic Lobar Buckling of Cylindrical Shells under External Hydrostatic Pressure. DTMB, Report 1392, August 1960.
2. Pulos, J. G.; Salerno, V. L. Axisymmetric Elastic Deformation and Stresses in a Ring Stiffened, Perfectly Circular Cylindrical Shell Under External Hydrostatic Pressure. BTMB, report 1947, sept. 1961.
3. Von Sander & Gunter. The Strength of Cylindrical Shells Stiffened by Frames and Bulkheads under External Hydrostatic Pressure. DTMB, Report No. T-38, 1962.
4. Wilson, L.B. The Elastic Deformation of a Circular Cylindrical Shell Supported by Equally Spaced Rings Frames under External Pressure. Trans. RINA. Vol. 106, 1966.
5. ASTM Steel Structural, Reinforcing, Pressure Vessel, Railway vol. 01-04 , pag.83, 1991, USA
6. DNV, Structural Reliability Analysis of Marine Structures. Classification Notes. DET NORSKE VERITAS, Norway, 1992.
7. Gonçalves, E.; Souza, G.F.M., Buelta, M.A.M. A Influencia dos Processos de Fabricação do Casco resistente de Submarinos sobre seu Comportamento Estrutural. 16 Congresso da SOBENA, Rio de Janeiro, 1996.

---

## Influence of geometric parameters in the load capacity of cylindrical surfaces under external pressure.

### Abstract:

This work is inserted in the development of the projects of cylindrical structure under pressure, evaluating and supplementing the existent resources for the project of circular cylindrical surface under external pressure. In the same are considered the analytic formulations to take into account the non-linear behaviours, (geometric and physic) when is necessary to verify the collapse of this type of structures.

The application of probabilistic methods of resistance analysis to the case of structures with shape of cylindrical shell under external pressure is sought. To complete this objective the critical loads are determined according to Reynolds's theory taking into consideration the variations of some geometric parameters with influence in this load.

**Key words:** Structures, stability, structural failures, imperfections, cylindrical shell under external pressure.