Cálculo de ejes y momentos principales de inercia.

L. O'connor Montero, N. Pérez Pérez.
Unidad Docente Metalurgica. Facultad de Ingeniería Mecánica
Instituto Superior Politécnico "José A. Echeverría"
Calle 127, S/N, CUJAE, Marianao 15, Ciudad de la Habana, Cuba
Telefono: 537-260-2267.
E-mail:udm@aacero.colombus.cu

(Recibido el 2 de febrero del 2000, aceptado el 12 de julio del 2001)

Resumen.

Se describen cálculos clásicos para determinar ejes y momentos principales de inercia de un cuerpo, y se demuestra que se pueden realizar cálculos con el mismo propósito mediante la aplicación del *Cálculo Tensorial, la Teoría Espectral y el Algebra Lineal.* Esto permite justificar los términos del título del trabajo constituye una extensión del modelo tensorial a la *estática,* que en correspondencia con los elementos que lo definen y según analogías con otras aplicaciones a la mecánica dan lugar a introducir la noción de *tensor de inercia* de un cuerpo. Bien interpretado, el modelo puede contribuir a cambios importantes en la enseñanza del álgebra en la Ingeniería.

Palabras claves: Tensor, cálculo tensorial, ejes y momentos principales de inercia, tensor de inercia.

1. Introducción.

El cálculo tensorial es una rama de la matemática que se ha desarrollado en el siglo XX. Su objeto de estudio se puede definir como *las transformaciones de las componentes del tensor al cambiar el sistema de coordenadas y la obtención de invariantes del tensor*.

Los trabajos iniciales desarrollados por *T. Levi-Civita* y *R. Lagrange* [2] están relacionados con los espacios curvos y las teorías relativistas; mientras que para la ingeniería se puede hallar un desarrollo teórico en Advanced Engineering Mathematics de *C. L. Wylie* [1].

La aplicación del cálculo tensorial a la resistencia de materiales permite establecer fundamentos de la teoría de los estados *tensional* y *deformacional* de un cuerpo, para lo cual se considera el tensor como una magnitud de nueve magnitudes escalares. La conceptualización realizada sobre el cálculo tensorial y resultados actuales acerca del estudio del estado de inercia de un cuerpo y las investigaciones del autor en la mecánica del medio continuo han condicionado la escritura del presente trabajo. Puede ser útil precisar que la noción de tensor que se utiliza es coherente con los conceptos de *variante* y *contravariante*. Sí resulta aparentemente abrupta su presentación esto obedece al interés del autor a dar prioridad a las aplicaciones [2]. Es importante comprender el resultado que se formaliza al final de este trabajo referente a la relación entre los valores y vectores propios asociados al tensor, con los momentos y los ejes principales de inercia del cuerpo.

2. Estática y Resistencia de los Materiales. Conceptos y modelos.

El momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje arbitrario **OL** se suele denotar $\mathbf{I_{OL}}$; depende de los cosenos directores $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ y de los momentos de inercia $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$ y se calcula mediante la expresión:

$$I_{ol} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{xz}\lambda_x\lambda_z - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z \quad (1)$$

Si sobre el eje **OL** se selecciona un punto **Q** de coordenadas (x, y, z) de tal manera que:

$$/OQ/ = 1 / (I_{ol})^{½} \quad (2)$$

Entonces los cosenos directores están dados por las expresiones siguientes:

$$\lambda_x = x / |OQ|,\ \lambda_y = Y / |OQ|,\ \lambda_z = Z / |OQ| \quad (3)$$

Al sustituir las expresiones de (2) y (3) en (1) y multiplicar convenientemente por el valor $|\mathbf{OQ}|^2$ se obtiene la expresión:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{xz}xz - 2I_{yz}yz = 1 \qquad (4)$$

Ello significa que el lugar geométrico de los puntos **Q** es una cuádrica centrada en el punto **O** denominada ***elipsoide de inercia del cuerpo***. Los ejes **X', Y' y Z'** según los cuales se anulan los productos de inercia de masa $\mathbf{I_{XY}}$, $\mathbf{I_{XZ}}$ **y** $\mathbf{I_{YZ}}$ se denominan ***ejes principales de inercia***, los valores $\mathbf{I_{x'}}$, $\mathbf{I_{y'}}$ **y** $\mathbf{I_{z'}}$ ***momentos de inercia de masa*** del cuerpo. Si se expresa la tensión normal $\boldsymbol{\sigma}$ en un plano inclinado por **X,Y** y **Z**, está claro que:

$$\sigma = Xl + Ym + Zn$$

De acuerdo con:

$$\left.\begin{array}{l} X = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ Y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ Z = \tau_{xy} l + \tau_{yz} m + \sigma_z m \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Se obtiene:

$$\sigma = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl + 2\tau_{xy} lm$$

Al ubicar en cada plano el segmento **r** sobre la normal, entonces las coordenadas de u extremo serán:

$$x = rl$$
$$y = rm$$
$$z = rn$$

Al eliminar los cosenos directores **l, m, n** en la expresión de $\boldsymbol{\sigma}$ se obtiene el lugar geométrico:

$$\sigma . r^2 = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{yz} yz + 2\tau_{zx} zx + 2\tau_{xy} xy$$

Al selecciona $r^2 = k/|\sigma|$ siendo K una constante arbitraria, entonces:

$$k = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{yz} yz + 2\tau_{zx} zx + 2\tau_{xy} xy$$

En cada punto que se investiga en el sólido tensionado existe un sistema de coordenadas **x, y, z** en el cual las tensiones tangenciales: τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{xy} son nulas. Estos ejes se denominan *ejes principales*, los planos ortogonales entre sí *planos principales* y las tensiones normales a estos planos *tensiones principales*, denotadas por $\boldsymbol{\sigma_3}$, $\boldsymbol{\sigma_2}$ y $\boldsymbol{\sigma_1}$. Siendo $\boldsymbol{\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1}$.

Al simplificar el sistema de fuerzas que aparecen sobre las caras del elemento en cuestión, y las ecuaciones que aparecen en la expresión [5], que en este caso serán:

$$x = \sigma_1 l,\ y = \sigma_2 m,\ z = \sigma_3 n \qquad l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

Resulta:

$$x^2/\sigma_1^2 + y^2/\sigma_2^2 + z^2/\sigma_3^2 = 1$$

Como se puede evidenciar, el lugar geométrico de los extremos del vector de la tensión completa forma un elipsoide cuyos semiejes son las tensiones principales $\boldsymbol{\sigma_1}$, $\boldsymbol{\sigma_2}$, $\boldsymbol{\sigma_3}$ y se le denomina ***elipsoide de las tensiones***. Al determinar las magnitudes de las tensiones principales, dados los valores de las 6 componentes del estado tensional, en un sistema arbitrario de coordenadas x, y, z la tensión S estará orientada según la normal:

$$x = Sl,\quad y = Sm,\quad z = Sn$$

Entonces las ecuaciones serán:

$$\left.\begin{array}{l} Sl = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \sigma_{zx} n \\ Sm = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ Sn = \tau_{xy} l + \tau_{yz} m + \sigma_z m \end{array}\right\} \text{Sistema homogéneo}$$

Para determinar los valores no nulos de **l, m y n**, los cosenos directores no son simultáneamente iguales a cero, pues: $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

Al describir el determinante y colocar sus términos por el orden de las potencias de S, se obtiene la ecuación cúbica:

$$S^3 - S^2 I_1 + SI_2 - I_3 = 0 \qquad (6)$$

Siendo:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$
$$I_2 = \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y - \tau^2_{yz} - \tau^2_{zx} - \tau^2_{xy}$$
$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{yz} & \tau_{zx} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Las raíces de la ecuación (6) dan los valores de las tensiones principales $\boldsymbol{\sigma_1}$, $\boldsymbol{\sigma_2}$, $\boldsymbol{\sigma_3}$. Se deduce como conclusión que el cálculo en la estática de los ejes principales y los momentos de inercia, así como el cálculo en la resistencia de los materiales de las tensiones principales se realiza por modelos matemáticos análogos. La determinación de las tensiones principales constituye una etapa necesaria intermedia en los cálculos de la resistencia del estado tensional complejo. Es por ello que resulta necesario la determinación de las tensiones principales; ya sea por la ecuación cúbica o por el diagrama circular del estado tensional (círculo de Morh).

3. Fundamentos del cálculo para determinar el estado de inercia de un cuerpo.

Si se considera la superficie cuádrica de inercia obtenida en el punto anterior y se expresa mediante la ecuación: $f(x,y,z) = 0$

Donde **f** es una función real definida sobre los puntos **P** de la cuádrica, entonces:

$$f(x,y,z)=I_x x^2+I_y y^2+I_z z^2-2I_{xy}xy-2I_{xz}xz-2I_{yz}yz-1 \quad (7)$$

En los puntos **P,** de intersección de los ejes de simetría con la superficie, se cumple que el vector de posición definido entre los puntos **O** y **P**, a saber:

$$\vec{OP} = \vec{r}$$

Es colineal con el vector normal a la superficie en el punto **P**. Esta relación da lugar a la igualdad:

$$\nabla \vec{f} = k\,\vec{r} \quad \text{Como} \quad \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

y además:

$$\nabla \vec{f} = (\partial f / \partial x)\,\vec{i} + (\partial f / \partial y)\,\vec{j} + (\partial f / \partial z)\,\vec{k}$$

Entonces al sustituir en la proporción y descomponer la ecuación vectorial coordenada a coordenada, se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} (I_X - k/2)x - I_{XY}\,y - I_{XZ}\,z = 0 \\ -I_{YX}\,x + (I_Y - k/2)y - I_{YZ}\,z = 0 \\ -I_{ZX}\,x - I_{ZY}\,y + (I_Z - k/2)\,z = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Si se divide cada ecuación por $|\mathbf{r}|$ y se sustituyen las expresiones correspondientes por los respectivos cosenos directores del vector de posición, entonces se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} (I_X - k/2)\lambda_X - I_{XY}\,\lambda_Y - I_{XZ}\,\lambda_Z = 0 \\ -I_{YX}\lambda_X + (I_Y - k/2)\,\lambda_Y - I_{YZ}\,\lambda_Z = 0 \\ -I_{ZX}\lambda_X - I_{ZY}\,\lambda_Y + (I_Z - k/2)\,\lambda_Z = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Al tener en cuenta que todos los cálculos anteriores son para los puntos **P** del elipsoide de inercia, los cuales son distintos del origen de coordenadas, entonces se admite que para los sistemas **[8]** y **[9]** se requieren soluciones no triviales. Esto significa que los respectivos determinantes se consideren iguales a cero, por lo tanto se tiene que:

$$\begin{vmatrix} I_X - k/2 & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{YX} & I_Y - k/2 & -I_{YZ} \\ -I_{ZX} & -I_{ZY} & I_Z - k/2 \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

Al desarrollar este determinante se obtiene una ecuación cúbica de **k** con soluciones $\mathbf{k_1}$, $\mathbf{k_2}$ y $\mathbf{k_3}$. Si cada uno de estos valores se sustituye en el sistema (9)**,** entonces da lugar a tres sistemas de ecuaciones que permiten determinar tres ternas de cosenos directores, los cuales indican las respectivas direcciones de los ejes de simetría del elipsoide de inercia. La necesidad anterior de asumir que el determinante sea igual a cero conduce a una situación de dependencia lineal en las ecuaciones del sistema (9) o en los vectores columnas del determinante (10)**.** Ello trae como consecuencia que para obtener los valores de los cosenos directores $\boldsymbol{\lambda_{Xi}}$, $\boldsymbol{\lambda_{Yi}}$, $\boldsymbol{\lambda_{Zi}}$ (para **i** igual a 1, 2 y 3) se deben seleccionar dos ecuaciones del sistema y completarlas con la ecuación:

$$(\lambda_{Xi})^2 + (\lambda_{Yi})^2 + (\lambda_{Zi})^2 = 1 \quad (11)$$

De modo tal que se forman nuevos sistemas de ecuaciones linealmente independientes que permiten calcular los correspondientes cosenos directores y encontrar con ello la solución del problema.

El problema de determinar los cosenos directores admite otra vía de solución mediante la cual no se requiere utilizar la ecuación (11). Para ello es necesario aplicar el concepto de tensor con la representación matricial mediante sus componentes ortogonales, el cálculo operacional y álgebra vectorial. Al asumir tales presupuestos y aceptar el resultado teórico de la representación gráfica de un tensor simétrico mediante un elipsoide, se encuentra una relación directa con el elipsoide de inercia del cuerpo y los sistemas de ecuaciones que se requieren resolver para encontrar los ejes principales de inercia del cuerpo.

Esta situación nos permite formalizar la expresión matricial que define el ***tensor de inercia*** del cuerpo en términos de sus componentes ortogonales y que se concreta en el modelo siguiente:

$$\overleftrightarrow{D} = \begin{pmatrix} I_X & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{YX} & I_Y & -I_{YZ} \\ -I_{ZX} & -I_{ZY} & I_Z \end{pmatrix} \quad (12)$$

El nombre **tensor de inercia** es afín a las componentes ortogonales que lo definen, está en analogía a denominaciones que se realizan en otras aplicaciones del álgebra tensorial a la mecánica y puede definirse como un *operador lineal*. El proceso de elaboración conceptual acerca del cálculo tensorial que permite llegar a expresiones del tipo (12) se inicia con el concepto de producto diádico de dos vectores **a** y **b** pertenecientes a dos sistemas de vectores **A** y **B** de un cierto espacio vectorial **E**.

La notación utilizada para este producto es del modo siguiente:

$\overset{\rightarrow\rightarrow}{ab}$ y no se formula regla para este cálculo.

A partir de este concepto se introduce el concepto de tensor de segundo rango en coordenadas cartesianas dado en términos de suma de productos diádicos y que se representa mediante la expresión:

$$\overset{\rightarrow\rightarrow}{T} = \sum_{i=1}^{n} \overset{\rightarrow\rightarrow}{a_i b_i}$$

Si se considera la base canónica y las combinaciones lineales de los vectores a_i y b_i entonces el tensor T adquiere la siguiente forma:

$$\overset{\rightarrow\rightarrow}{T} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \overset{\rightarrow\rightarrow}{e_i e_j}$$

Donde los valores a_{ij} se denominan *componentes ortogonales del tensor* y permiten representarlo en notación matricial según (12). Asociado a este concepto de tensor se define una operación “o” del modo siguiente:

$$\overset{\rightarrow\rightarrow}{T} \, o \, \vec{x} = \sum_{i-1}^{3} \sum_{j-1}^{3} a_{ij} \, \vec{e}_i \left(\vec{e}, \vec{x} \right)$$

A partir de este resultado se concreta la concepción de T como *operador* y permite la construcción de la representación gráfica de un tensor simétrico mediante la expresión:

$$\vec{r} \, . \, (\vec{T} \, o \, \vec{r}) = \vec{k}$$

Este es un modelo matemático que cumple la misma función que el trabajo desarrollado para construir los elipsoides de inercia y de tensión. En este caso se obtiene un elipsoide como representación gráfica del tensor.

Si se estudia la estructura del determinante (10) en el sentido de las características de los vectores columnas, se compara con la expresión del tensor de inercia (12) y se aplican los conceptos de valor y vector propio de la teoría espectral, entonces se deduce la ecuación característica del cálculo operacional que permite determinar los momentos principales de inercia y los ejes principales de inercia del tensor de inercia.

En efecto, de la ecuación operacional:

$$\overset{\rightarrow\rightarrow}{D} \, \vec{x} = k/2 \, \overset{\rightarrow\rightarrow}{I} \, \vec{x}$$

Donde intervienen el operador tensor de inercia, el operador identidad, los valores propios k/2 y los vectores propios x, se obtiene la ecuación homogénea

$$\left[\overset{\rightarrow\rightarrow}{D} - k/2 \, \overset{\rightarrow\rightarrow}{I} \right] \vec{x} = \vec{0} \qquad (13)$$

y desde aquí la ecuación característica:

$$\left| \overset{\rightarrow\rightarrow}{D} - k/2 \, \overset{\rightarrow\rightarrow}{I} \right| = 0 \qquad (14)$$

Esta se corresponde con la ecuación (10), permite calcular los valores propios del operador tensor de inercia y obtener los subespacios propios asociados.

Estos elementos coinciden con los momentos principales de inercia del cuerpo y los fundamentos teóricos de ocasión para determinar las direcciones principales de inercia del cuerpo.

En el caso general, la ecuación (14) admite raíces reales o complejas y la multiplicidad de las raíces reales puede ser menor o igual que tres. Al suponer que la ecuación (14) tiene raíces reales desiguales κ_1, κ_2 y κ_3 o valores propios de multiplicidad uno, entonces la sustitución de cada uno de estos valores en (13) conduce a un sistema homogéneo cuya solución constituye el subespacio vectorial propio asociado al correspondiente valor propio. Para llegar a tales subespacios basta reconocer que cada una de las sustituciones realizadas da lugar a sistemas en los cuales solo existe una variable independiente, lo cual determina la dimensión uno de cada subespacio propio y con ello la formación de tres subespacios.

Como los vectores correspondientes a subespacios diferentes son linealmente independientes, entonces para obtener las **direcciones principales de inercia** del cuerpo solo basta escoger un vector de cada subespacio propio y con ellos definir las direcciones principales.

En el sentido de los cálculos los resultados anteriores se concretan del modo siguiente:

Al sustituir cada valor propio κ_i en (13)se obtiene el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} (I_X - k_i)x - I_{XY}\, y - I_{XZ}\, z = 0 \\ -I_{YX}\, x + (I_Y - k_i)y - I_{YZ}\, z = 0 \\ -I_{ZX}\, x - I_{ZY}\, y + (I_Z - k_i)\, z = 0 \end{cases} \qquad (15)$$

La solución de este sistema se puede representar según el conjunto siguiente:

$$S(\kappa_i) = \left\{ \begin{array}{l} (x,y,z) \in \Re^3 \, / x=g(\kappa_i,I_X,I_Y,I_{XY},I_{XZ},I_{YZ})y \\ \qquad z=h(\kappa_i, I_Y, I_Z,I_{XY},I_{XZ},I_{YZ})\ y \end{array} \right\}$$

El cual indica los subespacios vectoriales propios generados por los valores propios κ_i con **i** igual a 1; 2 y 3. En cada uno de estos subespacios se selecciona un vector y se obtiene el sistema de vectores que define las direcciones principales de inercia del cuerpo. Como se puede apreciar la existencia de una sola variable independiente, en correspondencia con la multiplicidad del valor propio, determina la dimensión uno del subespacio propio y tiene como significado geométrico que $\mathbf{S(\kappa_i)}$ origina un eje de simetría o de inercia del cuerpo. Similar análisis se puede realizar para los casos en los cuales una de las raíces κ_i tiene multiplicidad mayor que uno. En estas situaciones se obtienen subespacios propios de dimensión mayor que uno, se generan planos y rectas y los ejes de inercia se deducen con igual procedimiento que el caso anterior.

Finalmente se demuestra que los valores propios del tensor constituyen los momentos principales de inercia $\mathbf{I_{x'}}$ $\mathbf{I_{y'}}$ **y** $\mathbf{I_{z'}}$**.** Para ello se realiza el siguiente algoritmo:

- Se sustituye en el sistema (9) el valor k/2 por los respectivos valores $k_i/2$.
- Identificar λ_X, λ_Y y λ_Z por λ_{Xi}, λ_{Yi} y λ_{Zi} .
- Multiplicar convenientemente las ecuaciones del sistema (9) por λ_{Xi}, λ_{Yi} y λ_{Zi} y sumar los resultados.

Con este algoritmo se obtiene el resultado siguiente:

$$I_x (\lambda_{Xi})^2 + I_y (\lambda_{Yi})^2 + I_z (\lambda_{Zi})^2 - 2I_{xy}(\lambda_x)_i(\lambda_y)_i - 2I_{xz} (\lambda_x)_i (\lambda_z)_i \; 2I_{yz} (\lambda_y)_i (\lambda_z)_i = k_i/2 \, [(\lambda_{Xi})^2 + (\lambda_{Yi})^2 + (\lambda_{Zi})^2] = k_i/2$$

Sí se compara este resultado con (1), entonces queda probado que $\mathbf{k_i/2}$ asume el valor de $\mathbf{I_{OL}}$ en dependencia que **OL** sea el correspondiente eje que se determina a partir de la dirección principal asociada. Conviene entender que cuando **OL** es un eje principal del tensor, entonces el valor propio correspondiente coincide con el momento de inercia del cuerpo respecto a ese eje, el cual queda expresado en términos de la base que genera los ejes principales.

4. Conclusiones.

- Los cálculos de ingeniería en la actualidad incluyen entre sus tendencias la aplicación de técnicas numéricas, métodos de aproximación y medios automatizados de cálculo de alta resolución que responden a una necesidad real del desarrollo de la ciencia y la tecnología.
- El caso desarrollado en este trabajo responde al interés de los autores por contribuir a formalizar el carácter general del ***cálculo tensorial*** en lo que concierne a sus aplicaciones a la mecánica. El resultado obtenido acerca de la relación entre los valores principales del tensor de inercia y el momento de inercia, con respecto al eje OL constituye un aporte en la relación *cálculo tensorial – estática*.
- Los estudios desarrollados se concretan tras conocer las aplicaciones a la resistencia de materiales, la mecánica de los fluidos y la teoría de la deformación plástica; desarrollar un sistema conceptual para el cálculo tensorial y encontrar las últimas elaboraciones de los autores [4].
- La contribución consiste en mostrar que el cálculo de los momentos y ejes principales de inercia de un cuerpo se puede desarrollar mediante el cálculo tensorial.
- Las ideas que se exponen permitieron lograr la introducción del término tensor de inercia de un cuerpo, nunca antes utilizado en la ingeniería, para describir el tensor que se construye a partir de los momentos principales de inercia y de los momentos producto de inercia masa del cuerpo.
- Resulta también de interés didáctico para la enseñanza en la ingeniería haber encontrado una aplicación del álgebra vectorial, lo cual enriquece las posibilidades de aplicación de la matemática a la mecánica. Este hecho se concreta mediante la aplicación de los subespacios propios asociados al espectro en lugar de la ecuación auxiliar:

$$(\lambda_{Xi})^2 + (\lambda_{Yi})^2 + (\lambda_{Zi})^2 = 1.$$

5. Bibliografia.

1. **J**enes A., E. Rodríguez y otros. Introducción al Cálculo Tensorial. Ediciones ISPJAE.1990.
2. **K**olmogorov, A.N. y S.V.Fomin. Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional. Moscú Editorial Mir 1975.
3. **S**errano Raúl. Cálculo tensorial para ingenieros. Universidad de Puebla. México. 1994.
4. **B**eer F.P. y E.R. Johnston. Vector Mechanics for Engineers. Statics. 6th Edition. EUA . 1996.
5. **F**eodosiev V.I. Resistencia de materiales. Editorial. Mir. Moscú. 1980.

The calculation of main axes and inertia momentum.

Abstract.

The tensors calculation and the spectral theory are applied to modelling the inertia state (main axes and momentum of inertia) of a body. This makes possible to enrich static engineering calculations and to generalise tensorial models beyond the materials resistance, fluids mechanic and the plastic deformation theory. Well interpretated, the model can lead to important changes in algebra teaching for mechanical engineers.

Key words: Tension member, tension calculation, inertia main axes , principals inertia momentum, inertia tension member.