

# Modelo matemático para el cálculo de las transmisiones Sinfín cilíndricas.

**B. Calixto Sirene, J. Llamas Soris y L. Otero Pereiro.**

Departamento de Mecánica Aplicada. Facultad de Ingeniería Mecánica.  
 Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría.[ISPJAE].  
 Calle 116 s/n. CUJAE, Marianao 15, Ciudad de la Habana, Cuba.  
 Telef. (537) 2602267; Telefax. (537)-2671208 / 2671644  
 E-mail: csirene@mecanica.ispjae.edu.cu

(Recibido el 18 de Septiembre del 2000, aceptado el 14 de Abril del 2001)

## Resumen

Durante la reconversión de reductores Sinfín se presentan diversas situaciones como resultado de los parámetros geométricos de la transmisión que son determinados en un elemento que posee desgaste, como se pretende restaurar las cualidades de servicio de un par dentado, se precisa obtener la geometría original de los elementos engranados. En este artículo se propone un modelo matemático que da solución a las situaciones más frecuentes y se presentan algunos de los algoritmos a partir de los cuales se elaboró un software para el cálculo.

**Palabras claves:** Engranajes Sinfín; cálculo geométrico; diseño de engranajes, modelo matemático

## 1. Introducción.

Los reductores Sinfín que han causado baja de servicio en Cuba, si son defectados y se descifran los componentes, estos pueden ser reconvertidos; para ello se requiere de la fabricación de la rueda y el tornillo Sinfín. Como el país generalmente no importa estos componentes como pieza de recambio, sino, formando parte de equipos y plantas completas; y como no existe una producción nacional a escala industrial, la demanda de reposición de los mismos aumenta cada vez más.

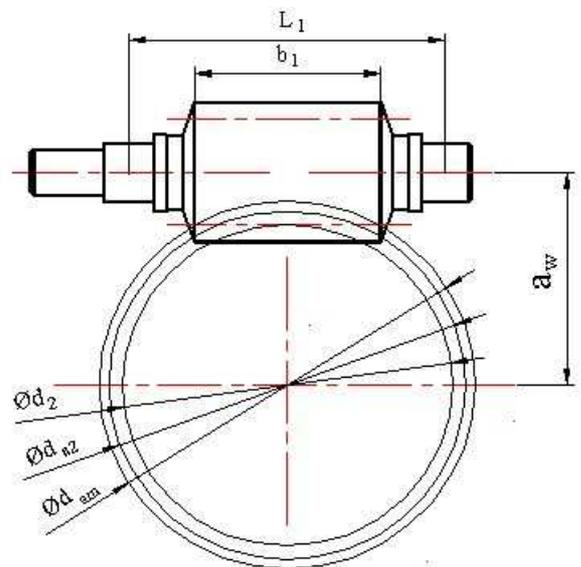
Con la reconversión pueden ser restablecidas las cualidades de servicio de la transmisión; esto presupone:

- Descifrar la geometría y los materiales.
- Adecuar la geometría y las precisiones a las posibilidades tecnológicas existente

## 2. Modelo físico.

Con vistas a dar solución a las situaciones más frecuentes durante el dimensionado y el descifrado de los elementos de una transmisión sinfín se ha desarrollado un modelo matemático a partir de los planos básicos de la transmisión (plano axial por el eje del tornillo, y por el de la rueda. En las figuras 1, 2 y 3 se acotan los parámetros geométricos a partir de los cuales se forman

los conjuntos de las variables que definen las situaciones más frecuente de descifrado



**Figura. 1** Plano axial de la transmisión por el tornillo.

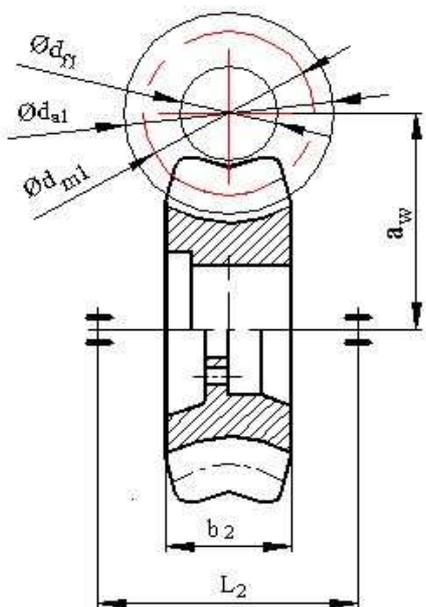


Figura. 2 Plano axial de la transmisión por el eje de la rueda.

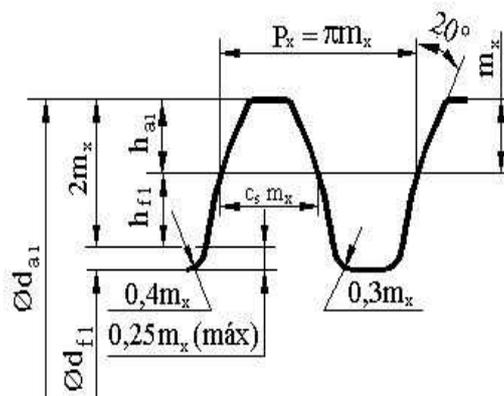


Figura. 3 Geometría de los filetes de los tornillos Sinfín cilíndricos

### 3. Modelo matemático.

El modelo matemático desarrollado sobre la base de la geometría ilustrada en las figuras 1,2 y 3, está compuesta por el conjunto de variables  $V$ .

$$V = \left\{ \begin{array}{l} a_w, b_1, b_2, d_{a1}, d_{a2}, d_{am}, d_{m1}, d_2, d_{f1}, f, h, h_a, h_f, \\ m_x, m_n, L_1, L_2, p_z, u, \Delta u, x_2, Z_1, Z_2, Z'_{m2}, \gamma_m \end{array} \right\} \quad (1)$$

Donde:

$a_w$  - Distancia entre los ejes del tornillo y la rueda Sinfín.

$b_1$ ; Longitud de la parte roscada del tornillo Sinfín.

$b_2$ ; Ancho de la corona de la rueda Sinfín.

$d_{a1}$ ; Diámetro del cilindro exterior del tornillo Sinfín

$d_{a2}$ ; Diámetro exterior de la rueda Sinfín.

$d_{am}$ ; Diámetro exterior máximo de la rueda Sinfín.

$d_{m1}$ ; Diámetro del cilindro de referencia del tornillo Sinfín.

$d_2$ ; Diámetro de referencia de la rueda Sinfín.

$d_{f1}$ ; Diámetro de raíz del tornillo Sinfín.

$f$ ; Valor límite de la flecha del árbol del tornillo Sinfín.

$h$ ; Altura de la espira.

$h_a$ ; Altura de cabeza de la espira.

$h_f$ ; Altura del pie de la espira.

$m_x$ ; módulo axial.

$m_n$ ; módulo normal.

$L_1$ ; Distancia entre los centros de presión de los rodamientos del tornillo Sinfín.

$L_2$ ; Distancia entre los centros de presión de los rodamientos de la rueda.

$p_z$ ; Paso axial de la espira.

$u$ ; Relación de transmisión.

$x_2$ ; Coeficiente de desplazamiento de la rueda.

$Z_1$ ; Número de espiras en el tornillo Sinfín.

$Z_2$ ; Número de dientes de la rueda.

$Z'_{m2}$ ; Número virtual de dientes de la rueda.

$\gamma_m$ ; Ángulo de elevación de la espira en el cilindro de referencia.

$\Delta u$ ; Error de la relación de transmisión.

El modelo matemático elaborado para el cálculo de la geometría de una transmisión Sinfín está compuesto por las relaciones siguientes.

$$d_{f1} - 0.6 \times a_w^{0.85} = 0 \quad (2)$$

$$L_1 - 3.3 \times a_w^{0.87} = 0 \quad (3)$$

$$f - \frac{d_{m1}}{1000} = 0 \quad (4)$$

$$m_x - \frac{2 \times a_w - d_{f1}}{2.4 + Z'_{m2}} = 0 \quad (5)$$

$$d_{m1} - d_{f1} + 2.4 \times m_x = 0 \quad (6)$$

$$d_2 - 2 \times a_w - d_{m1} = 0 \quad (7)$$

$$d_{a2} - d_2 + 2 \times m_x = 0 \quad (8)$$

$$h_a - m_x = 0 \quad (9)$$

$$d_{a1} - d_{m1} + 2 \times m_x = 0 \quad (10)$$

$$x_2 - \frac{Z'_{m2} - Z_2}{2} = 0 \quad (11)$$

$$\gamma_m - \text{tg}^{-1} \left( \frac{m_x \times Z_1}{d_{m1}} \right) = 0 \quad (12)$$

$$m_n - m_x \times \text{Cos}(\gamma) = 0 \quad (13)$$

$$d_{am} - d_2 + 3 \times m_x = 0 \quad (14)$$

$$u - \frac{Z_2}{Z_1} = 0 \quad (15)$$

$$h - h_a + h_f = 0 \quad (16)$$

$$h_f - 1.2 \times m_x = 0 \quad (17)$$

$$L_2 = 0.76 \times a_w \quad (18)$$

$$b_2 - 1.125 \sqrt{(d_{a1} + 2 \times c)^2 - (d_{a1} - 4 \times h_a)^2} = 0 \quad (19)$$

$$b_1 - \sqrt{\left( \frac{d_{a2}}{2} \right)^2 - \left( \frac{d_2}{2} - h_a \right)^2} = 0 \quad (20)$$

Aunque empleando el modelo citado, puedan formularse teóricamente infinitos problemas  $\mathbf{P} = \{\mathbf{E}, \mathbf{S}\}$ , donde  $\mathbf{E}$  es el subconjunto de variables de entrada (datos) y  $\mathbf{S}$  el subconjunto de variables de salida (solución), ambos perteneciente al conjunto de variables del modelo  $\mathbf{V}$  (1), del análisis de las fallas y de las defectaciones realizadas en los elementos de la transmisiones se determinó que las situaciones que se presentan son las que se describen por los conjuntos de variables  $E_1$ ;  $E_2$ ;  $E_3$  y  $E_4$  en (21), (23), (25) y (27) respectivamente. Análogamente se designa por  $S_1$ ;  $S_2$ ;  $S_3$  y  $S_4$  al conjunto de variables respuesta citados en (22), (24), (26) y (28); entonces los problemas a resolver pueden ser formulado de la siguiente forma:

$$P_1 = \left\{ \begin{matrix} E_1 \\ S_1 \end{matrix} \right\}; \quad P_2 = \left\{ \begin{matrix} E_2 \\ S_2 \end{matrix} \right\};$$

$$P_3 = \left\{ \begin{matrix} E_3 \\ S_3 \end{matrix} \right\}; \quad P_4 = \left\{ \begin{matrix} E_4 \\ S_4 \end{matrix} \right\}$$

Donde se designa el problema por la letra P, el conjunto de variables de entrada o datos por E y S representa el conjunto de variables de la solución.

$$E_1 = \{a_w, d_{a1}, p_z, u_n, Z_1\} \quad (21)$$

$$S_1 = \left\{ \begin{matrix} b_1, b_2, d_{a2}, d_{am}, d_{m1}, \\ d_2, d_{f1}, f, h, h_a, h_f, \\ m_x, m_n, L_1, L_2, u_r, \\ x_2, Z_2, Z_{m2}, \gamma_m, \Delta u \end{matrix} \right\} \quad (22)$$

$$E_2 = \{Z_1, d_{a1}, p_z, u_n\} \quad (23)$$

$$S_2 = \left\{ \begin{array}{l} a_w, b_1, b_2, d_{a2}, d_{am}, \\ d_{m1}, d_2, d_{f1}, f, h, h_a, \\ h_f, m_x, m_n, L_1, L_2, \\ u_r, x_2, Z_2, Z_{m2}, \gamma_m, \\ \Delta u \end{array} \right\} \quad (24)$$

$$E_3 = \{a_w, u_n, Z_1\} \quad (25)$$

$$S_3 = \left\{ \begin{array}{l} b_1, b_2, d_{a1}, d_{a2}, d_{am}, \\ d_{m1}, d_2, d_{f1}, f, h, h_a, \\ h_f, m_x, m_n, L_1, L_2, \\ p_z, u_r, x_2, Z_2, Z_{m2}, \\ \gamma_m, \Delta u \end{array} \right\} \quad (26)$$

$$E_4 = \{a_w, d_{a1}, p_z, Z_1\} \quad (27)$$

$$S_4 = \left\{ \begin{array}{l} b_1, b_2, d_{a2}, d_{am}, d_{m1}, d_2, d_{f1}, \\ f, h, h_a, h_f, m_x, m_n, L_1, L_2, \\ u_r, u_n, x_2, Z_2, Z_{m2}, \gamma_m, \Delta u \end{array} \right\} \quad (28)$$

$$E_5 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Mt.} \\ \text{r.p.m} \\ \text{fs} \end{array} \right\} \quad (29)$$

La situación representada por  $E_5$  corresponde a un caso de diseño, en la cual hay que determinar las variables  $E$  que satisfagan las prestaciones de partida. Entonces, seleccionando de la serie de reductores Sinfín cubana una unidad de reducción que satisfaga la magnitud del momento torsor necesario, la relación de transmisión y las condiciones de operación (factor de servicio), se determinan las variables de entrada. En caso de que ningún reductor de la serie satisfaga dichas prestaciones, se procede a realizar un diseño individual; en cualquier caso, el modelo a partir de la definición del conjunto de variables  $E$ , del conjunto de variables del modelo conducirá a la solución  $S$  correspondiente.

La existencia de un número importante de reductores Sinfín que por diversas causas han causado baja de

servicio, los cuales no han sido repuestos por la incapacidad financiera para cubrir los altos costos que ello implica, impulsó al desarrollo de la reconversión de reductores a partir del descifrado de la geometría de los elementos de la transmisión; para tal empeño se elaboró el Software **SFWIN v1.0** mostrado en la figura 4, a partir del modelo matemático citado, donde:

#### WGdes<sub>1</sub>:

Descifrar la geometría de la transmisión a partir del conjunto de variables  $E$  que son determinadas durante las mediciones de los diámetros, paso, y distancia interaxial de los elementos de la transmisión.

La relación de transmisión es una expresión de las prestaciones necesarias, dando lugar a dos alternativas:

#### WG DES I

Algoritmo para el problema  $P_1 = \left\{ \begin{array}{l} E_1 \\ S_1 \end{array} \right\}$  Figura. 5

#### WG DES II

Algoritmo para el problema  $P_4 = \left\{ \begin{array}{l} E_4 \\ S_4 \end{array} \right\}$

#### Wgdim.

Sólo se dispone de la distancia interaxial (es decir se dispone de una carcaza o se puede determinar la distancia entre los centros de los elementos dentados); en este caso las prestaciones necesarias en términos de relación de transmisión tienen que formar parte de las variables de entrada.

$$P_3 = \left\{ \begin{array}{l} E_3 \\ S_3 \end{array} \right\}$$

#### WGdes2.

Responde al caso de las transmisiones abiertas partiendo de la existencia del tornillo Sinfín en el que puedan ser medidos los diámetros y el paso.

$$P_2 = \left\{ \begin{array}{l} E_2 \\ S_2 \end{array} \right\}$$

#### Wgdesign.

Es un caso de diseño de una transmisión a partir del conocimiento de las prestaciones.  $E_5$ .

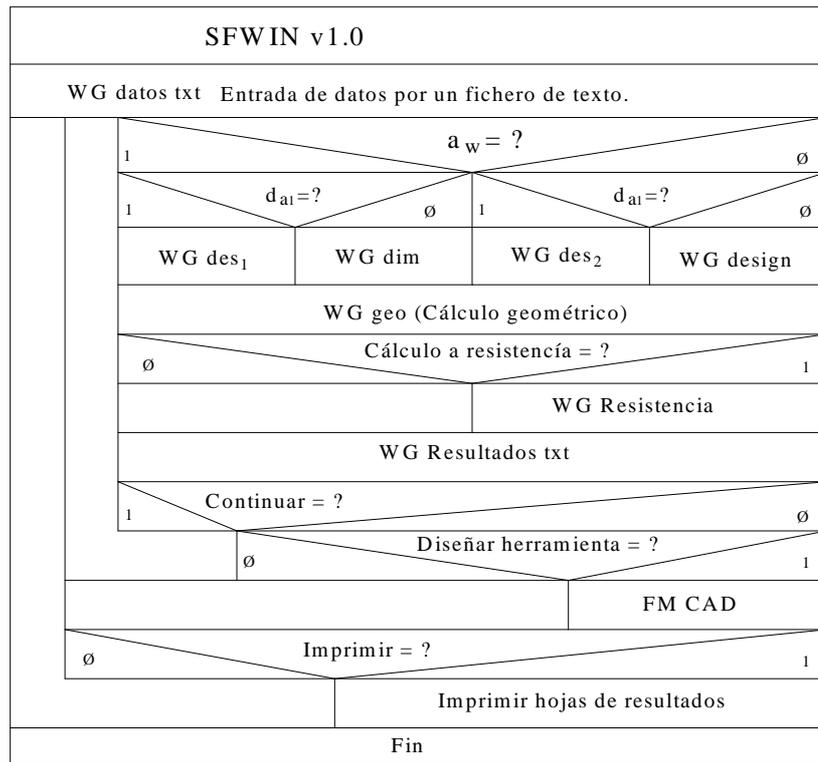


Fig: 4 Algoritmo principal de SFWIN v 1.0 v1.0

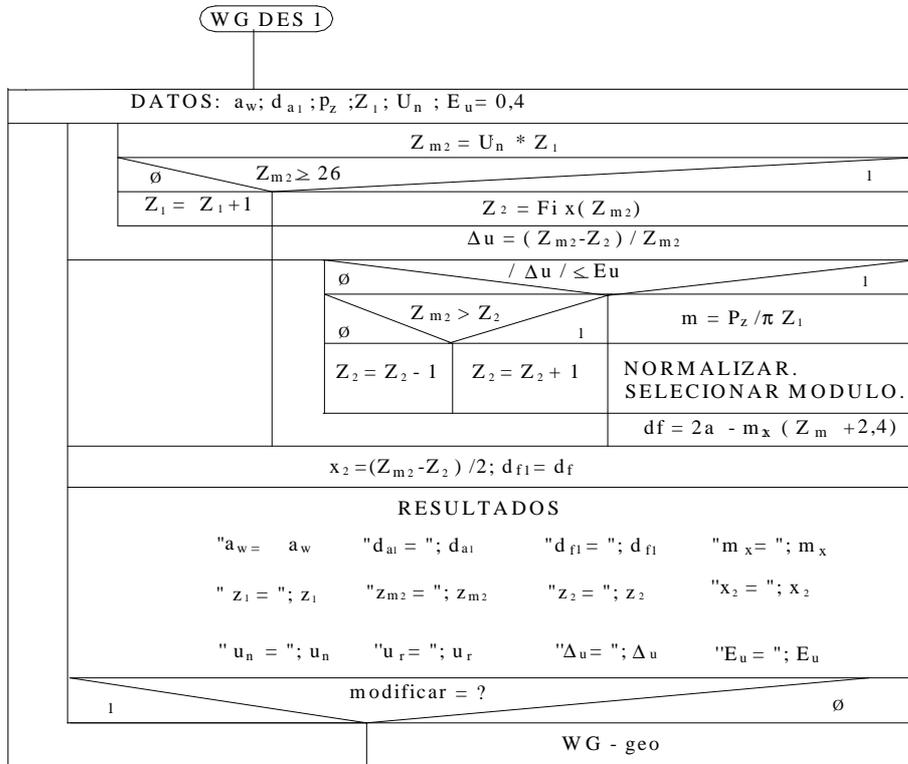


Fig. 5 Algoritmo de WG DES1

#### 4. Conclusiones.

- El modelo matemático desarrollado sobre la base de las investigaciones realizadas y cumpliendo con las recomendaciones de las normas DIN 3976, AGMA 6022-C 93, BS 721, parte 2/1983, permite resolver todas las situaciones que se presentan en el descifrado y cálculo geométrico de transmisiones sinfín cilíndricas, sustentable en las condiciones cubanas.
- Los software elaborados según los algoritmos, poseen interfases gráficas que permiten al especialista hacer un conjunto de análisis de las desviaciones del perfil y los espesores teórico y real en las espiras del Sinfín (fresa madre), que hasta el momento no era posible hacer, debido a la complejidad de las ecuaciones y a su representación gráfica de forma manual.

#### 5. Bibliografía.

1. A.N.S.I/A.G.M.A 6022-C93. "American National Standard Desig Manual for Cylindrical Wormgearing", 1993.
2. Alonso Toledo Javier; "Sistema para el diseño automatizado de transmisiones Sinfín, Trabajo de Diploma de Ingeniero Mecánico, Tutor MSc. Ing. Calixto Sirene, Bernardino La Habana, Cuba 1998.
3. B. S. 721: Part 1 1983: "British Standard Specification of Worm gearing".Part 1. Metric units. London, 1983
4. B.S. 721: Part 2. 1983: "British Standard Specification of Worm gearing".Part 2. Metric units. London, 1983
5. De Armas Ing. Juan C.: "Capacidad de carga de las transmisiones Sinfín" Tesis de maestría Tutor MSc. Ing. Calixto Sirene, Bernardino La Habana., Cuba 1998

---

## Mathematical model for worm gear calculation.

### Abstract:

On this paper based on measurement of the gear elements after wear is presented a mathematical model which what can be calculated the original geometrical parameter of Worm gear for the more frequency situation. The algorithmic for the calculate program computer is shown

**Key words:** Worm gear, geometric calculation, gear design, mathematical model.