

Eficiencia de los engranajes cilíndricos con árboles fijos.

1ª Parte: Factores de influencia y procedimientos de cálculo

L. Martínez Delgado, M. Sánchez Noa

Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría"

Facultad de Ingeniería Mecánica. Departamento de Mecánica Aplicada.

Calle 127 s/n, Marianao. C. Habana, Cuba.

E-Mail: lmartínez@ispjae.edu.cu.

(Recibido el 23 de enero de 1999, aceptado el 12 de septiembre de 1999)

Resumen

El trabajo muestra el análisis realizado para la obtención de un conjunto de formulas que permiten evaluar, de forma analítica y suficientemente exacta, el cálculo de la eficiencia de las transmisiones por engranajes cilíndricos a evolvente, así como conocer cuales son los parámetros geométricos y cinemáticos que influyen en dicha eficiencia. Una parte de las fórmulas obtenidas conforman un modelo matemático para la evaluación de la eficiencia.

Palabras Claves: Engranajes, Eficiencia.

1. Introducción

La práctica ha demostrado que las transmisiones por engranajes cilíndricos con perfil de evolvente son muy eficientes. Sin embargo a pesar del desarrollo que estas transmisiones han alcanzado, poco se ha publicado sobre la forma de evaluar analíticamente la eficiencia de las mismas. Entre los trabajos publicados, relacionados con el tema, se destacan: los de Baranov [1], Castillo [2] y Kudriatsev [3], los cuales brindan expresiones que permiten evaluar aproximadamente la eficiencia de los engranajes cilíndricos. Según los autores mencionados, la eficiencia en estas transmisiones puede calcularse:

Según Baranov

$$\eta = 1 - \frac{\pi \cdot \mu \cdot \varepsilon_{\alpha}}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \quad (1)$$

Según Castillo

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{2,3 \cdot \mu}{\cos \alpha_{wt}} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right)} \quad (2)$$

Según Kudriatsev

$$\eta = 1 - 2,3 \cdot \mu \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \quad (3)$$

Las fórmulas anteriores son aplicables a engranajes cilíndricos en general. Sin embargo sólo la fórmula (1) considera los engranajes con dientes helicoidales, a través del coeficiente de recubrimiento frontal.

Lo cierto es que (2) y (3) son aproximaciones de la fórmula (1).

Dichas fórmulas se han obtenido despreciando términos y/o realizando aproximaciones para obtener expresiones de trabajo sencillas.

Por tanto el uso de las mismas no permite evaluar la influencia de los diferentes parámetros geométricos presentes en el engranaje. Por ejemplo, analizando la fórmula (3) se tiene la impresión de que la eficiencia solo depende de los parámetros μ , z_1 y z_2 .

Se desconoce de otros trabajos que permitan evaluar de manera más exacta, a lo brindado por las fórmulas anteriores, la influencia en la eficiencia de los parámetros geométricos y cinemáticos. El presente trabajo pretende brindar un procedimiento suficientemente exacto para el cálculo de la eficiencia en los engranajes cilíndricos, que permita además

analizar la influencia, en la misma, de los parámetros señalados.

2. Relaciones generales en el cálculo de la eficiencia

En las transmisiones por engranajes cilíndricos, al igual que en todos los mecanismos, también se produce cierta disipación de la potencia entregada a estos. Lo anterior está motivado por diversas causas, tales como:

- El deslizamiento relativo y la fuerza de rozamiento existente entre los dientes, durante el contacto entre estos a lo largo de la línea de engranaje.
- El batimiento del lubricante, en el caso de lubricación por inmersión.
- El rozamiento en los apoyos de los árboles.

En este trabajo solo se analiza lo concerniente a la eficiencia en el engranaje, asociada a las pérdidas originadas solo por la interacción entre los dientes y el efecto del coeficiente de fricción.

La eficiencia en los engranajes η , al igual que en otros mecanismos, depende del coeficiente de pérdidas ψ , ya que la suma de ambos es:

$$\eta + \psi = 1 \quad (4)$$

Consideremos una transmisión por engranaje, formada por un piñón motriz (1) y la rueda conducida (2), en el cual N_1 es la potencia que llega al piñón, N_2 la que entrega la rueda y N_f la disipada en el dentado. Esto permite que el coeficiente de pérdidas sea formulado de la forma siguiente:

$$\psi = \frac{N_f}{N_1} = \frac{N_1 - N_2}{N_1} \quad (5)$$

sustituyendo (5) en (4) se obtiene:

$$\eta = \frac{N_2}{N_1} \quad (6)$$

Analizando (5) se puede plantear que $N_1 = N_2 + N_f$, luego

sustituyendo en (6) se tiene:

$$\eta = \frac{N_2}{N_2 + N_f} = \frac{1}{1 + \frac{N_f}{N_2}} = \frac{1}{1 + k} \quad (7)$$

donde $K = \frac{N_f}{N_2}$

Luego el cálculo de la eficiencia en un engranaje se reduce a calcular el término K , que se denominará

relación pérdida-eficiencia, ya que se puede demostrar usando (5) y (6) que:

$$K = \frac{\psi}{\eta} = \frac{\psi}{1 - \psi} = \frac{1 - \eta}{\eta}$$

3. Potencia disipada a lo largo de la línea de engranaje

Consideremos la transmisión de la Fig.1a, formada por el piñón (1) que transmite un momento torsor Mt_1 con una velocidad angular

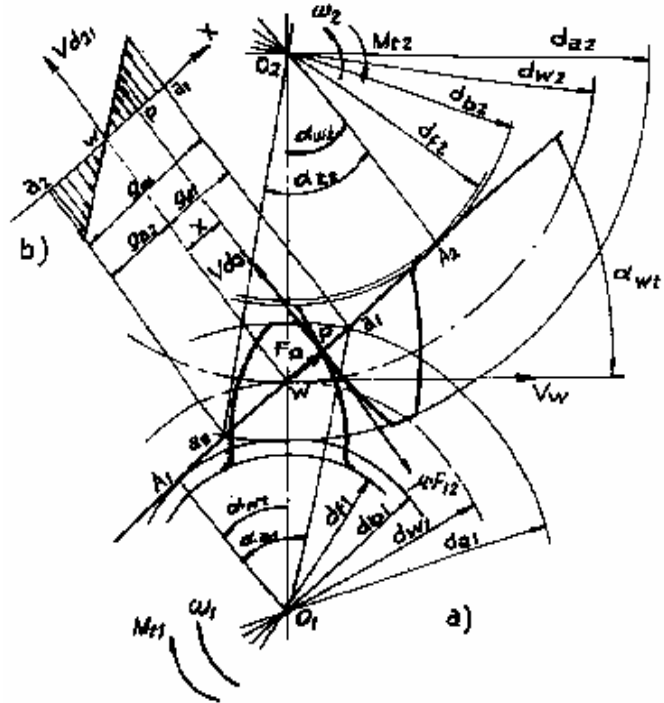


Fig.1 a) Fuerzas en el engranaje, b) Velocidad de deslizamiento ω_1 y la rueda (2) que transmite un momento torsor Mt_2 con velocidad angular ω_2 .

Durante el proceso de engranaje se produce rodadura y deslizamiento entre los dientes. Las pérdidas por rodadura son insignificantes, por lo que la potencia disipada entre los dientes es considerada como una función de la velocidad de deslizamiento y de la fuerza de rozamiento que actúa tangente a las superficies de los dientes en contacto, o sea, perpendicular a la línea de engranaje A_1A_2 .

Para un análisis más general, el trabajo se ha desarrollado basándose en los engranajes cilíndricos

helicoidales, considerando estos como engranajes compuestos por múltiples engranajes rectos iguales, desplazados entre sí angularmente. Esto permite considerar la transmisión como un sistema de mecanismos en paralelo, iguales, y plantear que la eficiencia de uno de dichos mecanismos es igual a la del sistema, es decir, igual a la del engranaje real. Luego para determinar la eficiencia de los engranajes cilíndricos en general, con árboles fijos, basta con obtener esta para los parámetros del engranaje en su plano transversal.

Durante el proceso de engranaje de una pareja de dientes, a lo largo de la línea práctica de engranaje a_1a_2 , el piñón 1 ejerce una fuerza sobre la rueda 2 de magnitud F_{12} . Esta fuerza en combinación con el coeficiente de rozamiento μ , produce la fuerza de fricción $\mu \cdot F_{12}$ que actúa tangente al perfil del diente y en sentido opuesto a la velocidad de deslizamiento V_{d21} . Esto produce una disipación de potencia que es igual a $-\mu \cdot F_{12} \cdot V_{d21}$. Para realizar este análisis también puede emplearse el piñón. En tal caso la potencia disipada se expresa como $-\mu \cdot F_{21} \cdot V_{d12}$. Esta potencia disipada es instantánea ya que la velocidad de deslizamiento varía en función de la posición del punto de contacto entre los dientes P. Para evaluar la potencia disipada en el intervalo a_1a_2 de la línea de engranaje se requiere calcular el trabajo de la fuerza de fricción W_f y el tiempo que demora el punto de contacto P en trasladarse desde a_1 hasta a_2 .

3.1 Análisis de la velocidad deslizamiento.

Haciendo uso de la Fig. 1a, con su sistema de referencia y de las ecuaciones del movimiento plano general, se tiene:

$$\vec{V}_{P1} = \vec{V}_w + \vec{V}_{P1w}$$

$$\vec{V}_{P2} = \vec{V}_w + \vec{V}_{P2w}$$

Ahora la velocidad de deslizamiento \vec{V}_{d21} viene dada por:

$$\begin{aligned} \vec{V}_{d21} &= \vec{V}_{P2} - \vec{V}_{P1} \\ &= \omega_2 \vec{k} \times \vec{x} \vec{i} - \omega_1 \vec{k} \times \vec{x} \vec{i} = (\omega_2 - \omega_1) \vec{k} \times \vec{x} \vec{i} \\ &= (\omega_2 - \omega_1) \cdot \vec{x} \vec{j} \end{aligned}$$

En forma escalar:

$$V_{d21} = (\omega_1 + \omega_2) \cdot x \quad (8)$$

x es la coordenada del punto de contacto P, referida al polo del engranaje w . A su derecha tiene signo (+) y a la izquierda es (-).

Como la velocidad V_{d21} es relativa, entonces $V_{d21} = -V_{d12}$

Estas velocidades varían con la coordenada x , alcanzando valores máximos en ambos extremos del segmento a_1a_2 , de la línea de engranaje. Luego, según la ecuación 8 en el polo w del engranaje, $V_{d21} = V_{d12} = 0$, es decir que en este punto la velocidad de deslizamiento se invierte. En la Fig. 1b se muestra como varía V_{d21} . El sentido de V_{d21} depende del sentido de rotación del piñón, es decir de ω_1 . Por tanto, si se invierte ω_1 cambiarán los flancos en contacto de los dientes y también cambiará la orientación de la línea de engranaje.

Haciendo uso de las relaciones cinemáticas y geométricas del engranaje, que se muestran a continuación,

$$\omega_1 = \frac{2 \cdot V_w}{d_{w1}} \quad ; \quad \omega_2 = \frac{2 \cdot V_w}{d_{w2}}$$

$$d_{w1} = \frac{m_n \cdot z_1 \cdot \cos \alpha_t}{\cos \beta \cdot \cos \alpha_{wt}}$$

$$d_{w2} = \frac{m_n \cdot z_2 \cdot \cos \alpha_t}{\cos \beta \cdot \cos \alpha_{wt}}$$

la ecuación 8 puede ser escrita de la forma siguiente:

$$V_{d21} = \frac{2 \cdot V_w \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha_{wt}}{m_n \cdot \cos \alpha_t} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \cdot x \quad (9)$$

3.2 Análisis del trabajo de las fuerzas de fricción.

El trabajo elemental d_{wf} desarrollado por la fuerza de fricción, durante un tiempo elemental dt se expresa mediante:

$$d_{wf} = -\mu \cdot F_{12} \cdot V_{d21} \cdot dt$$

$$\text{donde } dt = \frac{dx}{V_w \cdot \cos \alpha_{wt}}, \text{ lo que permite escribir}$$

$$d_{wf} = -\mu \cdot F_{12} \cdot V_{d21} \cdot \frac{dx}{V_w \cdot \cos \alpha_{wt}} \quad (10)$$

Planteando la condición de equilibrio para la rueda 2, mediante $\sum M_{O2} = 0$ se tiene:

$$F_{12} \cdot r_{b2} - M_{t2} + F_{12} \cdot \mu [r_{b2} \cdot \tan \alpha_{wt} - x] = 0$$

De la geometría del engranaje se conoce:

$$r_{b2} = \frac{d_{b2}}{2} = \frac{m_n \cdot z_2}{2 \cdot \cos \beta} \cos \alpha_t. \text{ Sustituyendo en la}$$

expresión anterior y despejando,

$$F_{12} = \frac{2 \cdot M_{t2} \cdot \cos \beta}{m_n \cdot z_2 \cdot \cos \alpha_t [1 + \mu \cdot \tan \alpha_{wt}] - 2 \cdot \mu \cdot x \cdot \cos \beta}$$

Obsérvese que F_{12} varía con la coordenada x . En el intervalo g_{a2} en que x es (-), F_{12} disminuye, y en el intervalo g_{a1} aumenta, ya que x es (+). Esto se acentúa si μ crece por cualquier razón.

Sustituyendo (9) y (11) en (10) y haciendo:

$$M_{t2} = \frac{N}{\omega_2}$$

$$a = 2 \cdot \mu \cdot m_n \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha_t \quad (12)$$

$$b = -m_n^2 \cdot z_2 \cdot \cos \alpha_t^2 \cdot (1 + \mu \cdot \tan \alpha_{wt}) \quad (13)$$

$$c = 4 \cdot \mu \cdot \cos^2 \beta \cdot \frac{N_2}{\omega_2} \cdot \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \cdot x \quad (14)$$

se obtiene:

$$d_{wf} = c \cdot \frac{x \cdot dx}{a \cdot x + b} \quad (15)$$

Integrando, el trabajo de las fuerzas de fricción se expresa mediante:

$$W_f = c \cdot \left[\int_{-g_{a2}}^0 \frac{x \cdot dx}{a \cdot x + b} - \int_0^{g_{a1}} \frac{x \cdot dx}{a \cdot x + b} \right]$$

Como Vd_{21} tiene signo contrario a $\mu \cdot F_{12}$ y se invierte cuando P pasa por w , la función W_f tiene signos contrarios a la función Vd_{21} . A esto se debe el signo (-) delante de la segunda integral, con lo cual se logra que el trabajo, en los segmentos g_{a2} y g_{a1} , de la línea de engranaje, sea (+).

Desarrollando se tiene:

$$W_f = c \cdot \left\{ \frac{b}{a^2} \ln \left[1 - \frac{a}{b} (g_{a2} - g_{a1}) \right] - \left[\frac{a}{b} \right]^2 g_{a2} \cdot g_{a1} \right\} + \frac{g_{a2} - g_{a1}}{a}$$

Haciendo:

$$k_1 = \frac{g_{a2} - g_{a1}}{a} \quad (16)$$

$$k_2 = \frac{b}{a^2} \quad (17)$$

$$k_3 = \left[\frac{a}{b} \right]^2 g_{a1} \cdot g_{a2} \quad (18)$$

$$k_4 = \frac{a}{b} (g_{a2} - g_{a1}) \quad (19)$$

podemos plantear que el trabajo realizado por las fuerzas de fricción a lo largo de la línea de engranaje, está dado por:

$$W_f = c \cdot \{ k_2 \cdot \ln[1 - k_3 - k_4] + k_1 \} \quad (20)$$

La potencia disipada N_f no es la misma para diferentes intervalos de tiempo a lo largo de la línea de engranaje, debido a que F_{12} y Vd_{21} están variando constantemente. Luego dicha potencia representa un valor promedio, o sea que:

$$N_f = \frac{W_f}{t} = \frac{W_f}{g_\alpha} = \frac{W_f \cdot \omega_1 \cdot d_{w1} \cdot \cos \alpha_{wt}}{2 \cdot g_\alpha} = \frac{W_f \cdot \omega_1 \cdot m_n \cdot z_1 \cdot \cos \alpha_t}{2 \cdot g_\alpha \cdot \cos \beta} \quad (21)$$

donde:

$$g_\alpha = g_{a1} + g_{a2} = \varepsilon_\alpha \cdot P_{bt} = \varepsilon_\alpha \cdot \frac{m_n \cdot \pi \cdot \cos \alpha_t}{\cos \beta}$$

Sustituyendo la fórmula (23) en (22) se tiene que:

$$N_f = \frac{W_f \cdot \omega_1 \cdot z_1}{2 \cdot \varepsilon_\alpha \cdot \pi} \quad (23)$$

Sustituyendo (14) y (20) en (23) y desarrollando, la potencia disipada se expresa mediante:

$$N_f = \frac{2\mu \cdot \cos^2 \beta \cdot N_2}{\varepsilon_\alpha \cdot \pi} (u+1) \{ k_2 \cdot \ln[1 - k_3 - k_4] + k_1 \}$$

4. Relación pérdida - eficiencia (k)

Dividiendo en la expresión anterior por N_2 , se obtiene:

$$K = \frac{2 \cdot \mu \cdot \cos^2 \beta}{\varepsilon_\alpha \cdot \pi} (u+1) \{ k_2 \cdot \ln[1 - k_3 - k_4] + k_1 \} \quad (24)$$

Los términos, k_1, k_2, k_3 y k_4 de las fórmulas (16), (17), (18) y (19) se obtienen valiéndose de la Fig. 1a y de las expresiones (12) y (13). De la geometría de engranajes se tiene que:

$$d_b = \frac{m_n \cdot z}{2 \cdot \cos \beta} \cos \alpha_t$$

luego usando la Figura 1a:

$$g_{a1} = \frac{m_n \cdot z_1}{2 \cdot \cos \beta} \cos \alpha_t (\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha_{wt}) \quad (25)$$

$$g_{a2} = \frac{m_n \cdot z_2}{2 \cdot \cos \beta} \cos \alpha_t (\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha_{wt}) \quad (26)$$

Sustituyendo en (25) , (26) y (12) en (16) se obtiene:

$$k_1 = \frac{z_2(\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha_{wt}) - z_1(\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha_{wt})}{4 \cdot \mu \cdot \cos^2 \beta} \quad (27)$$

Sustituyendo (12) y (13) en (17) se obtiene:

$$k_2 = -\frac{z_2(1 + \mu \cdot \tan \alpha_{wt})}{(2 \cdot \mu \cdot \cos \beta)^2} \quad (28)$$

Sustituyendo (12), (13), (25) y (26) en (18) se obtiene:

$$k_3 = \frac{\mu^2}{u} \cdot \frac{(\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha_{wt})(\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha_{wt})}{(1 + \mu \cdot \tan \alpha_{wt})^2} \quad (29)$$

y sustituyendo (13) , (14) , (26) y (27) en (20) se obtiene:

$$k_4 = -\frac{\mu}{z_2} \cdot \frac{\left[z_2(\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha_{wt}) - z_1(\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha_{wt}) \right]}{1 + \mu \cdot \tan \alpha_{wt}} \quad (30)$$

Además, de la geometría de engranajes:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2\pi} \left[z_1(\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha_{wt}) + z_2(\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha_{wt}) \right] \quad (31)$$

$$\alpha_{a1,2} = \cos^{-1} \left[\frac{\cos \alpha_t}{1 + \frac{2 \cdot \cos \beta}{z_{1,2}} \cdot (h_a^* + x_{1,2} - \Delta y)} \right] \quad (32)$$

$$\Delta y = x_1 + x_2 - y \quad (33)$$

$$y = \frac{z_1(u+1)}{2 \cdot \cos \beta} \left[\frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{wt}} - 1 \right] \quad (34)$$

$$\alpha_{wt} = \text{Arclnv} \left[\text{Inv } \alpha_t + 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \tan \alpha \right] \quad (35)$$

$$\alpha_t = \tan^{-1} \left(\frac{\tan \alpha}{\cos \beta} \right) \quad (36)$$

5. Conclusiones

La eficiencia en los engranajes cilíndricos no depende de su módulo.

La eficiencia η es función de los parámetros: μ , β , u , z_1 , x_1 , x_2 , h_a^* y α .

La dependencia que tiene η del coeficiente μ es mucho más compleja que lo expresado mediante las fórmulas (1), (2) y (3).

Los resultados alcanzados en (7), (24), (27), (28), (29), (30) y formulas conocidas de la geometría como (31), (32), (33), (34), (35) y (36) conforman un modelo matemático que permite calcular de forma bastante precisa la eficiencia en los engranajes cilíndricos.

Bibliografía

1. Baranov, G.G., 1985, Curso de Teoría de Mecanismos y Máquinas. Editorial MIR, Moscú. pag. 393-396
2. Castillo, G., 1977, Teoría de Mecanismos y Máquinas (Dinámica de las Máquinas). Editorial Pueblo y Educación. Cuba. pag. 43-47
3. Kudriatsev, V.N., 1976, Transmisiones Planetarias. Editorial Mashinostroenie, Moscú. pag. 41-43.

Efficiency of cylindrical gears with fixed shafts. Part 1: Factors of influence and procedures of calculation

Abstract:

The present paper deals with the analysis carried out to establish formulations that allow, in an analytical and accurate way, the evaluation of the efficiency of cylindrical involute gears and therefore, the geometrical and cinematal parameters that influence in such efficiency.

Key Words: Gears, Efficiency.