

Influencia de las imperfecciones geométricas en estructuras de paredes delgadas sometidas a presión externa

V. González Fernández

Departamento de Mecánica Aplicada. Facultad de Ingeniería Mecánica.
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría.
Calle 127 s/n, Marianao 15, Ciudad de la Habana, Cuba
Teléfono: (537) 20 2267 Fax: (537) 27 1208
E-mail: vladimir@mecanica.ispjae.edu.cu

(Recibido el 12 de octubre de 1999, aceptado el 17 de enero del 2000)

Resumen

Este trabajo está relacionado con el estudio del comportamiento de estructuras de paredes delgadas sometidas a presión externa, cuando aparecen imperfecciones geométricas, inherentes a los procesos de fabricación, que afectan los valores de las cargas críticas. En el mismo se describen comportamientos pos críticos típicos y su importancia en el estudio de los efectos de estas imperfecciones, así como formulaciones aproximadas, tomando en consideración la necesidad del conocimiento de las posibles trayectorias de equilibrio por parte del ingeniero en el análisis y toma de decisiones acerca de una estructura.

Palabras claves: Estructura, bóveda, estabilidad, fallas estructurales, trayectorias de equilibrio.

1. Introducción

El avance de la ingeniería de estructuras en las últimas décadas se ha debido, entre otros, a dos factores. En primer lugar, la mayor capacitación técnica en el proyecto y en el análisis estructural, en función de los progresos obtenidos en los campos teóricos, experimental y computacional. En segundo lugar, a la disponibilidad de materiales con propiedades mecánicas cada vez mejores. Esto propició la posibilidad de concebir estructuras mas ligeras, y por lo tanto, más esbeltas. Por este motivo el estudio de la estabilidad pasó a jugar un papel fundamental y hasta decisivo en el proyecto de este tipo de estructuras, además, las inevitables imperfecciones, debidas a los procesos de fabricación, alteran la capacidad de soportar carga, siendo necesario profundizar en el conocimiento del comportamiento estructural ante tales imperfecciones.

La ingeniería naval, la aeronáutica y la industria de producción petrolera, entre otras, han avanzado en esta dirección, y particularmente la industria del petróleo, que se extendió al mar, en aguas profundas y ultra

profundas, y que utiliza en sus equipamientos elementos estructurales de paredes delgadas que serán sometidos a presiones hidrostáticas al trabajar en esas condiciones. Estas estructuras solo son viables si son ligeras, económicas y confiables.

Los actuales criterios de proyecto toman en cuenta estos hechos a través de la utilización de coeficientes de seguridad adecuados, muchas veces basados en resultados experimentales y con la limitación de los valores de las posibles imperfecciones, que deben ser medidas durante la fabricación, definiendo valores admisibles [1,2,3].

La actuación del ingeniero solamente será dada de una forma activa y segura, mediante un profundo conocimiento sobre el tipo de comportamiento que presentará la estructura cuando son alcanzadas las cargas críticas, incluyendo la forma que asume en el caso de pérdida de estabilidad y su comportamiento posterior a la carga crítica, y sobre la mayor o menor alteración de esos valores debido a la imperfección, en fin todo lo relacionado con el fenómeno de la estabilidad.

2. Trayectorias de equilibrio

A continuación serán descritos los comportamientos típicos de una estructura sometida a fuerzas conservativas aplicadas estáticamente, dentro de los límites de la estabilidad elástica. Esto será hecho por medio de la descripción de las trayectorias de equilibrio, entendidas como el conjunto de los posibles estados de equilibrio, analizando el efecto de las imperfecciones geométricas.

En los gráficos Fuerza vs Desplazamiento de la figura 1, se presentan las trayectorias de equilibrio típicas de una estructura, considerando solo un modo de pandeo asociado al punto de bifurcación, siendo la nomenclatura utilizada la siguiente:

P: carga aplicada.

P_c : carga crítica.

Δ : desplazamiento total de un punto de la estructura.

W: parte del desplazamiento total que corresponde al modo de pérdida de estabilidad.

En las líneas de cada gráfico se sigue el convenio siguiente:

- Línea gruesa continua: estado de equilibrio estable de la estructura perfecta.
- Línea gruesa discontinua: estado de equilibrio inestable para la estructura perfecta.
- Línea fina continua: estado de equilibrio estable para la estructura con pequeña imperfección geométrica que se corresponda con el modo de pandeo.
- Línea fina discontinua: estado de equilibrio inestable para la misma estructura imperfecta.

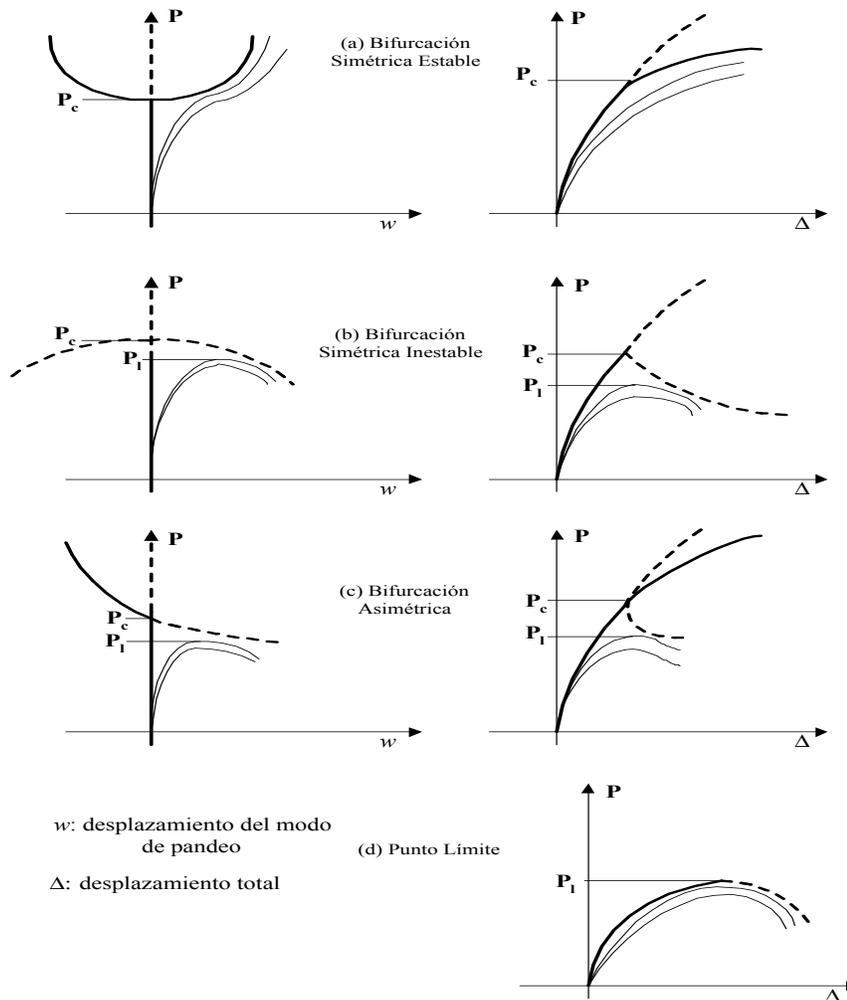


Fig. 1 Trayectorias de equilibrio para un modo de pandeo.

La figura 1a, se denomina Bifurcación Simétrica Estable, la misma muestra las trayectorias de equilibrio de una estructura que, sin imperfección inicial, después de la carga crítica sigue una trayectoria de estados de equilibrio estables.

En el gráfico P vs w , la primera trayectoria, vertical con inicio en $P=0$, es estable hasta el punto de bifurcación correspondiente a la carga P_c , y es inestable para valores mayores. La segunda trayectoria, válida para $P > P_c$, que intercepta a la primera en ese punto de bifurcación, es siempre estable. Se resalta que en el propio punto de bifurcación también es estable. La estructura, por lo tanto, puede pandearse, según la forma específica de ese modo de pandeo, y soportar una carga que exceda el valor de P_c .

Se indican también las trayectorias de equilibrio correspondientes, para una carga que se inició en $P=0$, para dos imperfecciones diferentes. Esas trayectorias son siempre estables y no tienen punto crítico. Sin embargo, las deformaciones de la estructura, y por lo tanto el nivel de los esfuerzos, es siempre mayor que el de la estructura perfecta, siendo más severo el efecto cuanto mayor la imperfección.

En la figura 1b, denominada Bifurcación Simétrica Inestable, la primera trayectoria de equilibrio de la estructura perfecta cruza, en el punto de bifurcación, una segunda trayectoria de estados de equilibrio inestables. La estructura, por tanto, después de ese punto de bifurcación, e inclusive en él, solo posee estados de equilibrio inestables. Es usual, en la literatura, decir que el “comportamiento pos-crítico” es inestable. La estructura, característicamente, se pandea con grandes deformaciones y no puede, por lo menos próximo al estado de equilibrio que poseía, soportar una carga mayor.

Para la estructura con imperfección inicial, la trayectoria es estable hasta un punto límite, correspondiente a la carga P_l , no existiendo punto de bifurcación. El propio punto límite ya es de equilibrio inestable. La estructura no puede soportar una carga mayor y cualquier tentativa en ese sentido viene acompañada por una deformación considerable. La carga crítica, en este caso P_l , es, normalmente, muy reducida en relación a la original P_c , aún para pequeñas imperfecciones.

Se debe resaltar la importancia del conocimiento del comportamiento pos-crítico de la estructura perfecta, aunque el interés esté enfocado sobre los efectos de las imperfecciones geométricas. Se hace evidente que el efecto negativo de esas imperfecciones, sobre la capacidad de soportar carga, es mucho mayor en el caso

de que el comportamiento sea del tipo Bifurcación Simétrica Inestable. En ese caso aparecen grandes discrepancias entre los resultados experimentales y el cálculo teórico de las cargas críticas cuando no son consideradas las imperfecciones. Los valores experimentales no solo son mucho mayores sino que muy dispersos, como consecuencia de esas inevitables imperfecciones que existen en los modelos ensayados y que, inclusive, son diferentes entre un modelo y otro.

En la figura 1c, denominada Bifurcación Asimétrica, está representado el comportamiento posterior al pandeo de una estructura que, dependiendo del sentido en que los desplazamientos del modo de pandeo ocurran, puede ser estable o inestable. El comportamiento para cada uno de los lados es semejante a los respectivos modos estable e inestable ya descritos, siendo inestable el punto de bifurcación del equilibrio.

Están indicadas las trayectorias de estructuras con imperfecciones, incluyéndose, para simplificación, solamente aquellas del lado en que el comportamiento posterior al pandeo es inestable. Su efecto es equivalente al caso de bifurcación simétrica inestable.

La figura 1d, denominada Punto Límite, representa el comportamiento de una estructura que, aún siendo perfecta, no posee punto de bifurcación, siendo el punto crítico del tipo punto límite.

No se representa el gráfico P vs w , debido a que este no se define por no existir pandeo.

La estructura hasta el punto límite, posee una trayectoria de equilibrio estable. Están también indicadas trayectorias de estructuras con imperfecciones que disminuyen la carga límite. Como esas imperfecciones son pequeñas, la reducción de la carga límite también lo es. En una primera aproximación se puede decir que no existe modo de pandeo para ser amplificado.

A modo de ilustrar lo descrito, para cada caso presentado, son citados algunos ejemplos a seguir de sistemas estructurales que le corresponden. Mayores detalles pueden ser obtenidos en Thompson y Hunt[4], Bushnell[5], Kollar y Dulacska[6].

Bifurcación Simétrica Estable.

Este comportamiento es típico de barras en compresión, anillos circulares con carga radial uniforme, chapas con carga en su propio plano (figura 2), arcos bi-articulados con ángulo total próximo a 180° , cascos esféricos finos, empotrados, con carga concentrada, etc.[7].

En este caso, el efecto de las imperfecciones geométricas de forma, evidentemente cuando son pequeñas, no es tan importante, como ya fue explicado.

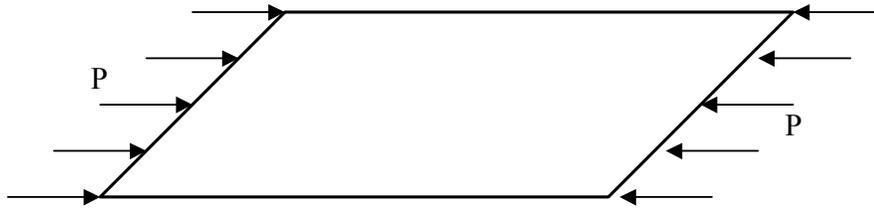


Fig. 2 Chapa con carga en su propio plano.

En este caso, el efecto de las imperfecciones geométricas de forma, evidentemente cuando son pequeñas, no es tan importante, como ya fue explicado.

Otro caso típico de este comportamiento es el de los arcos empotrados con carga radial uniforme que pierden la estabilidad según la forma mostrada en la figura 4.

Bifurcación Simétrica Inestable.

Este comportamiento es característico de cascos de paredes finas, con raras excepciones. Un cilindro sometido a compresión axial o presión hidrostática y las esferas o semiesferas sometidas a presión externa son ejemplos típicos, con la formación de un gran número de lóbulos. La figura 3 presenta el caso de un cilindro en compresión axial, pudiendo verse los modos correspondientes en [7].

Además de lo anterior, el hecho de que estos casos posean varios modos de pandeo o pérdida de estabilidad, con presiones críticas coincidentes o muy próximas, es una agravante. Eso, aliado al comportamiento pos-crítico inestable, explica por qué estas estructuras son las que tienen mayor sensibilidad a las imperfecciones geométricas, llevando a grandes reducciones de la carga crítica y a las mayores diferencias entre los resultados teóricos y experimentales.

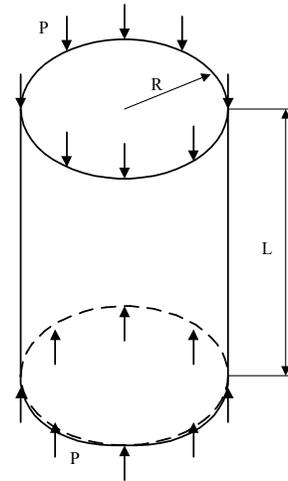
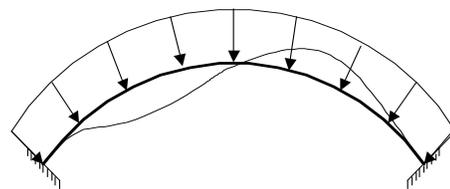
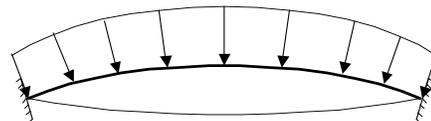


Fig. 3 Cilindro comprimido axialmente



(a) arco no abatido, bifurcación simétrica inestable



"snap-through"

(b) arco abatido, punto límite

Fig.4 Tipos de inestabilidad para arcos empotrados con carga uniforme.

Bifurcación Simétrica Estable o Inestable.

Algunas estructuras pueden presentar uno de los dos comportamientos después de pandearse, dependiendo de su geometría y de las relaciones de rigidez entre sus elementos. Una barra comprimida sobre apoyos elásticos y estructuras reticuladas de modo general, constituyen casos típicos. Ya los cascos cilíndricos cortos, sometidos a presión lateral externa, tienen comportamiento estable, que se torna inestable para longitudes mayores.

Los cascos cilíndricos reforzados con anillos rígidos, sometidos a presión lateral o presión hidrostática, tienen ese mismo comportamiento. Uno de los modos de pérdida de estabilidad corresponde al pandeo del cilindro entre anillos solamente. Para ese modo, el comportamiento pos-crítico es estable para pequeños espaciamientos de los anillos e inestable cuando esos espaciamientos van creciendo. Con relación al modo de pérdida de estabilidad global, que envuelve al cilindro y los anillos, si es un cilindro corto, se tiene una mayor presión crítica, pero un comportamiento posterior inestable. Si aumenta el largo, la presión crítica disminuye, pero se va haciendo cada vez menos inestable, tendiendo a un comportamiento semejante al de una barra en compresión axial.

Esas estructuras deben ser proyectadas de forma tal que vayan en la dirección de la bifurcación estable, aminorando así los problemas inherentes a las imperfecciones geométricas.

Bifurcación Asimétrica.

Desde el punto de vista práctico, para el análisis de los efectos de las imperfecciones geométricas, este caso es semejante al de la Bifurcación Simétrica Inestable, pues se puede decir que siempre existe la posibilidad de que ocurra una imperfección del “lado inestable”.

Son típicas de ese comportamiento las estructuras reticuladas con las juntas reforzadas. Otro caso clásico es el del panel cilíndrico comprimido axialmente, figura 5, si el pandeo ocurre para “para afuera”, $-w$, su curvatura aumenta y la bifurcación es estable. Lo contrario ocurre si el pandeo es “para adentro” $+w$.

Punto Límite.

El caso más típico de estructuras perfectas, que pueden presentar ese comportamiento, es el de los arcos abatidos sometidos a carga radial. Para la carga crítica, hay una inversión de la curvatura por medio de un rápido desplazamiento (“snap through”), en la busca de otro estado de equilibrio visto en la Figura 4b.

En realidad, las estructuras que, cuando son consideradas perfectas, tienen un comportamiento pos crítico inestable, al presentar imperfecciones tendrán un

comportamiento del tipo punto límite. Por eso la importancia de entender este caso.

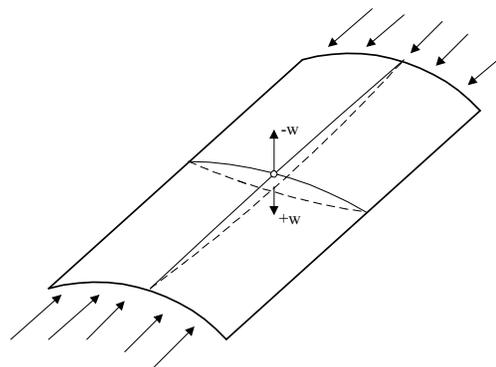


Fig 5 Panel cilíndrico en compresión axial. Bifurcación Asimétrica.

3. Ecuaciones para trayectorias de equilibrio

trayectorias de equilibrio para las estructuras con imperfección, hasta el punto límite. Un análisis de ese tipo envuelve, como norma, un gran volumen de trabajo y, en algunos casos, es impracticable. Por ejemplo, cuando se tienen modos de pandeo con cargas críticas muy próximas. Por tanto, se justifica una evaluación analítica simplificada que, aún obteniéndose resultados solo cualitativos, de informaciones útiles respecto a como se comporta la estructura.

En este sentido, la teoría propuesta por Koiter[8,9] ha sido, a lo largo de los años muy utilizada y extremadamente útil. Ella fue posteriormente explorada, entre otros, por Budiansky y Hutchinson[10], Budiansky[11], Arbocz[12] y Seide[13], que la expusieron en una forma más fácil de aplicar.

Para estructuras perfectas, excepto para unos pocos casos, tales como la barra en compresión axial o un anillo circular con carga radial uniforme, no es posible obtener expresiones analíticas que gobiernen una buena parte de su comportamiento posterior al pandeo. La teoría de Koiter solo permite determinar la trayectoria de equilibrio en el entorno del punto de bifurcación, y cuando hay un único modo asociado a ese punto. En esos casos la siguiente ecuación es utilizada para la curva P vs w .

$$P = P_c (1 + aw + bw^2 + \dots) \quad (1)$$

donde:

- P - valor de la carga
- P_c - carga crítica
- w - amplitud del desplazamiento correspondiente al modo de pandeo
- a, b - constantes para ser determinadas analíticamente, caso a caso, en función del tipo de carga y de la estructura, Seide[13].

Considerando que la ecuación (1) es válida solo para pequeños valores de w, son utilizadas solo las constantes a y b, correspondientes a w y w². Para esa condición, los tres tipos diferentes de bifurcación mostrados en la figura 1, son reproducidos en forma simplificada en la figura 6.

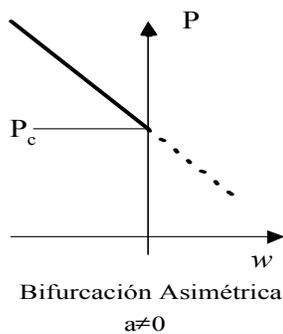
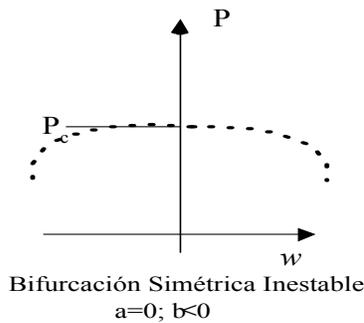
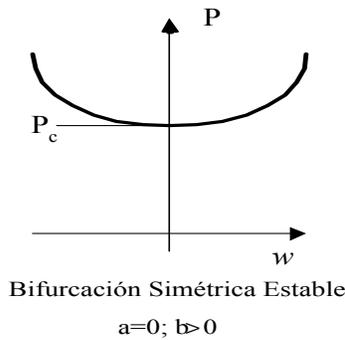


Fig 6 Tipos de bifurcación. Constantes a y b

Pueden destacarse los siguientes aspectos:

En la Bifurcación Simétrica Estable e Inestable es razonable suponer que el comportamiento pos crítico no depende del sentido que la forma pandeada va a seguir.

La estructura tiene el mismo comportamiento independiente del signo del desplazamiento w. Véase, como ejemplo, la barra comprimida, en el caso de bifurcación estable o el cilindro en compresión axial, en el caso inestable. Por lo tanto, para que eso ocurra, se debe tener a=0. Con b>0 se tiene la Bifurcación Simétrica Estable y con b<0 la Inestable. En ese caso, el simple conocimiento del signo y valor de b de la estructura perfecta es suficiente para saber si su comportamiento pos crítico es estable o inestable y si la sensibilidad a las imperfecciones geométricas es menor o mayor.

En la Bifurcación Asimétrica es usual despreciar el término w², tornando la trayectoria de equilibrio lineal, y en ese caso efectivamente asimétrica. Aquí la importancia de las imperfecciones geométricas es siempre relevante.

Utilizando ese mismo procedimiento, Budiansky[11] obtuvo otras expresiones para las trayectorias de equilibrio de estructuras con imperfecciones, y las respectivas cargas críticas, considerando las siguientes hipótesis:

- Pequeña imperfección de la misma forma del modo de pandeo.
- Comportamiento previo al pandeo es lineal y elástico.

Se tiene que:

Bifurcación Simétrica Inestable (a=0 y b<0)

$$\left(1 - \frac{P}{P_c}\right)w + bw^3 = \frac{P}{P_c} \bar{w} \tag{2}$$

$$\left(1 - \frac{P_l}{P_c}\right)^{3/2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} (-b)^{1/2} |\bar{w}| \frac{P_l}{P_c} \tag{3}$$

Bifurcación Asimétrica (a ≠ 0, a · w̄ < 0)

$$\left(1 - \frac{P}{P_c}\right)w + aw^2 = \frac{P}{P_c} \bar{w} \tag{4}$$

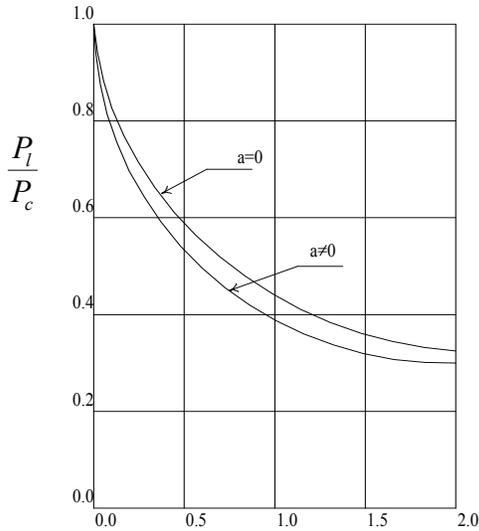
$$\left(1 - \frac{P_l}{P_c}\right)^2 = 4(-a) \bar{w} \frac{P_l}{P_c} \tag{5}$$

donde:

- P, w, P_c, P_l Datos en la figura 1
- w Amplitud de la imperfección

La variación de P_l / P_c, como función de los otros parámetros relacionados, es mostrada en la figura 7.

La tangente a la curva P_l / P_c versus \bar{w} es vertical en $\bar{w} = 0$, indicando, en ambos casos, una gran sensibilidad a las imperfecciones. Aun para pequeños valores iniciales llevan a una disminución considerable de la carga crítica.

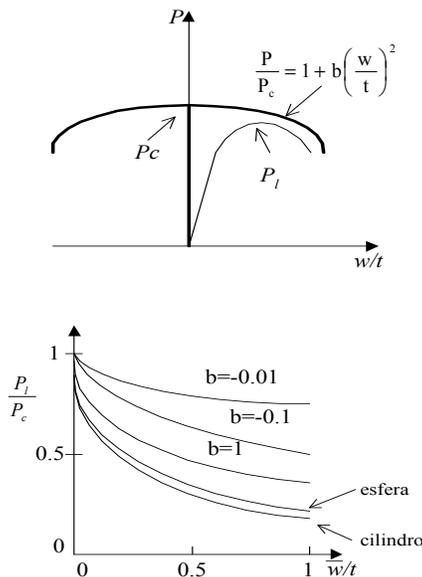


$$-4a\bar{w} \quad \frac{3\sqrt{3}}{2}(-b)^{1/2}|\bar{w}|$$

(a ≠ 0) ó (a = 0)

Fig 7 Curvas de sensibilidad a las imperfecciones.

Fig 8 Sensibilidad a las imperfecciones en bóvedas.



Observando las ecuaciones 2 y 4, para pequeños valores de desplazamiento w , y por tanto para pequeño

valor de la carga P comparada con P_c , por ejemplo, se llega a la ecuación del factor de amplificación, equivalente al que se obtiene para una barra.

$$w = \frac{P}{P_c - P} \bar{w} \tag{6}$$

En el caso típico de bóvedas, con Bifurcación Simétrica Inestable, los parámetros de la ecuación (3) son normalizados utilizando el espesor t , quedando:

$$\left(1 - \frac{P_l}{P_c}\right)^{3/2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}(-b)^{1/2} \left| \frac{\bar{w}}{t} \right| \frac{P_l}{P_c} \tag{7}$$

donde $b < 0$ también es calculado, normalizando el espesor. En la figura 8 se ilustra como la sensibilidad a las imperfecciones puede variar con b , dando, en ese aspecto, el significado del módulo de esa constante.

- w = amplitud del desplazamiento del modo de pandeo
- \bar{w} = amplitud de la imperfección
- t = espesor de la bóveda

Son indicados valores típicos de un cilindro en compresión axial (cilindro) y un casco esférico con presión uniforme (esfera). Por lo tanto, un sistema estructural con un valor de $b \approx -1$ posee una sensibilidad a las imperfecciones tan severa como en estos casos.

Finalmente podemos plantear que un sistema estructural con más de un modo de pandeo presenta acoplamiento entre las trayectorias de equilibrio correspondientes a cada uno de esos modos, generándose nuevas trayectorias.

Este fenómeno es de importancia para el estudio de la influencia de las imperfecciones geométricas cuando esos modos poseen cargas críticas muy próximas.

Una profundización en el tema es hecha por Thompson y Hunt[4]. Formas de trayectorias para casos típicos, son presentadas por Chilver[12], Supple[13] y algunos ejemplos, simplificados, para cascos esféricos y cilíndricos, son desarrollados por Hutchinson[14,15] y Arboz y Babcock[16].

4. Conclusiones

A continuación serán presentadas algunas conclusiones, que aunque no agotan todas las posibilidades teóricas de análisis del tema tratado, si pueden conducir a un mejor entendimiento del comportamiento de estas estructuras.

Es necesario el conocimiento del valor de la carga crítica y comportamiento estructural pos crítico de la estructura perfecta, pues a partir de este conocimiento

pueden obtenerse informaciones de la estructura con imperfecciones geométricas.

La influencia de las imperfecciones geométricas es de mayor importancia en los casos llamados Bifurcación Simétrica Inestable y Asimétrica.

El valor de la carga crítica, excepto en el caso de Bifurcación Simétrica Estable, sirve como límite superior para la estructura con imperfecciones.

Las imperfecciones cuyo patrón se corresponda con el modo de pérdida de estabilidad son de gran importancia en el comportamiento de la estructura.

El conocimiento teórico del comportamiento de la estructura, en el análisis de estabilidad, es de fundamental importancia en las decisiones que se pueden tomar con relación a la misma durante su vida útil y ante defectos o daños que puedan aparecer.

5. Bibliografía

1. 1-ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Section VIII, Division 2 and Section III. The American Society of Mechanical Engineering, New York, 1994.
2. 2-Specification for Unfired Fusion Welded Pressure Vessel, BS5500, British Standard Institution, London, 1991.
3. 3-DAST Richtlinie OB, Beulsicherheitsnachweise für Schalen, DIN4114.
4. 4-Thompson, J.M.T. & Hunt, G.W.: A General Theory of Elastic Stability, John Wiley & Sons, London, 1973.
5. 5-Bushnell, D.: Computerized Buckling Analysis of Shells, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Netherlands, 1989.
6. 6-Kollár, L. & Dulácska, E.: Buckling of Shells for Engineers, John Wiley & Sons, New York, 1984.
7. 7-Buelta, M.A.M.: A Importância das Imperfeições Geométricas no Projeto e Fabricação de Estruturas, Texto de Apoio para a Prova de Erudição do Concurso para Professor Titular, EPUSP, São Paulo, Brasil, 1997.
8. 8-Koiter, W.T.: On the Stability of Elastic Equilibrium, Thesis, Delft Univ., H.J. Paris, Amsterdam, English transl, NASA, Rep. TTF-10, 1967.
9. 9-Koiter, W.T.: Elastic Stability and Post-Buckling Behavior, Proc. Symp. Math. Res. Center, University of Wisconsin, Madison, 1963
10. 10-Budiansky, B. & Hutchinson, J.W.: Dynamic Buckling of Imperfection Sensitive Structures, Proc. XI Intern. Cong. Appl. Mech. Berlin, 1964.
11. 11-Budiansky, B.: Theory of Buckling and Post-Buckling Behavior of Elastic Structures, in Advances in Applied Mechanics, Academic Press, London, 1974.
12. 12-Arbocz, J. The Effect of the Initial Imperfections on the Shell Stability, in Thin Shell Structures, Prentice Hall, New Jersey, 1974.
13. 13-Seide, P.: A Reexamination of Koiter's Theory of Initial Postbuckling Behavior and Imperfection Sensitivity of Structures, in Thin Shell Structures Prentice Hall, New Jersey, 1974.
14. 14-Chilver, A.H.: Coupled Modes of Elastic Buckling, Journal Mech. Phys. Solids, Vol. 15. Pergamon Press, Ltd, Great Britain, 1967.
15. 15-Hutchinson, J.W.: Axial Buckling of Pressurised Imperfect Cylindrical Shell, AIAA Journal, Vol.3, 1975.
16. 16-Arbocz, J & Babcock, C.D.: The Effect of General Imperfection on the Buckling of Cylindrical Shell, Journal of Applied Mechanics, Transaction of the ASME, Vol. 36, New York, 1969.

Influences of the geometric imperfections in thin wall structures with external pressure.

Abstract

This work deals with the study of the behavior of thin walled structures external pressure, when in the same appear geometric imperfections that are inherent to the process of manufacturing and affect the values of critical loads. In the same, post critical typical behaviors and its importance in the study of the effects of the geometric imperfections are described, as well as approximate formulations taking in consideration the possible trajectories of equilibrium in the structure analysis re.

Key words: structures, shells, stability, structural failures, trajectories of equilibrium.