

# Realización computacional en tres dimensiones del Método de los Elementos de Contorno en la teoría de la Elasticidad

**I. L. Alemán Romero.**

Departamento de Matemática. Facultad de Ingeniería Mecánica.  
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría. (ISPJAE).  
Calle 127 s/n, CUJAE, Marianao 15, Ciudad de la Habana, Cuba  
Teléfono: 5-37-202267 Fax: 5-37-277129  
E-mail: ialeman@mecanica.ispjae.edu.cu

(Recibido el 21 de diciembre de 1999, aceptado el 7 de febrero del 2000)

## Resumen

En este trabajo se muestra la realización computacional en tres dimensiones del Método de los Elementos de Contorno en la Teoría de la Elasticidad Lineal, para medio homogéneo e isotrópico considerando el efecto de las cargas másicas.

La realización computacional del método radica en discretizar el contorno mediante elementos en los que los desplazamientos y las tracciones se suponen variando de acuerdo a funciones de interpolación. Aplicando el "método de colocación" se obtiene un sistema de ecuaciones lineales que aporta la solución en el contorno, a partir de la cual se puede obtener la solución en cualquier punto de la región de definición del problema.

En el presente trabajo se consideran elementos triangulares, se emplea interpolación lineal, se utiliza la transformación a coordenadas homogéneas y se muestran los algoritmos que conducen al ensamblaje del sistema de ecuaciones que aporta la solución en el contorno.

**Palabras claves:** Elementos de Contorno(MEC, BEM), realización computacional, elementos triangulares.

## 1.Introducción

El estudio de los diferentes fenómenos físicos requiere de la adopción de un modelo físico en el cual se desprece el efecto de todos aquellos factores que no juegan un papel determinante en el estudio del problema que se pretende y se conserven sólo aquellos que sean capaces de caracterizarlo esencialmente y que permitan modelar las condiciones de contorno y la forma geométrica del problema hasta definirlo de manera precisa. El modelo físico en este trabajo es la teoría general de la elasticidad.

$$u_j(\xi) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} U_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Gamma(x)$$

Donde:

$U_{ij}^*(\xi, \mathbf{x})$  y  $P_{ij}^*(\xi, \mathbf{x})$  son las llamadas soluciones fundamentales de Kelvin[7] que representan los desplazamientos y tracciones en la dirección del eje

En el estudio de esta teoría existen dos modelos matemáticos fundamentales: el modelo operacional y el modelo energético o variacional. Los modelos energéticos conducen generalmente a modelos matemáticos en términos de ecuaciones integrales o integrodiferenciales, cuya solución se obtiene mediante métodos variacionales.

En la teoría de la elasticidad se puede recurrir a principios variacionales conocidos, como es la identidad de Somigliana [2]:

$j$  debido a la acción de una carga unitaria aplicada en el punto  $\xi$  en la dirección del eje  $i$ , cuyas expresiones para el problema en tres dimensiones son:

$$U_{ij}^* = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \left( (3-4\nu)\delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right)$$

$$P_{ij}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \left[ (1-2\nu)\delta_{ij} + 3 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu) \left( \frac{\partial r}{\partial x_i} n_j - \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i \right) \right\}$$

Donde:

$\nu$ ,  $E$ ,  $G$  : Coeficiente de Poisson, Módulo de Young y Módulo de corte respectivamente

$$r = r(x, \xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i - \xi_i}{r} : \text{derivada parcial de } r \text{ respecto a } x_i$$

$r$ : distancia entre los puntos  $x$  y  $\xi$

Donde:

$$\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = \nabla r \cdot \mathbf{n} = \frac{(x_1 - \xi_1)n_1 + (x_2 - \xi_2)n_2 + (x_3 - \xi_3)n_3}{r}$$

Derivada parcial de  $r$  respecto a la normal unitaria exterior  $\mathbf{n}$

$b_j$  : carga másica en la dirección del eje  $x_j$ .

$n_i$  : vector normal en la dirección del eje  $x_i$

$i$  : presión en la dirección del eje  $x_i$

$i$  : desplazamiento en la dirección del eje  $x_i$

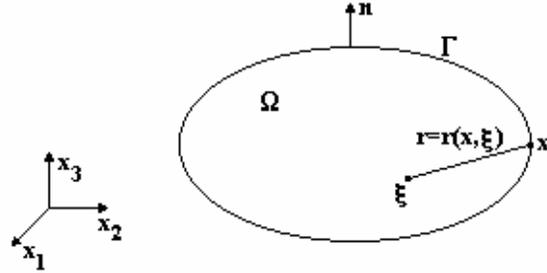


Fig.1 Representación del dominio del problema.

La ecuación integral en el dominio (ver fig. 1) que tiene incluidas las condiciones de contorno, en un proceso de paso al límite [1] se transforma a una ecuación integral en el contorno que resulta ser la ecuación de partida del Método de los Elementos de Contorno. Para ello el punto  $\xi$  de la región  $\Omega$  es llevado al contorno  $\Gamma$ , obteniéndose la ecuación integral siguiente:

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) + \int_{\Omega} U_{ij}^*(\xi, x)b_j(x)d\Gamma(x) \quad (1)$$

Donde:

$$C_{ij} = \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ij}^*(\xi, x)d\Gamma(x)$$

( $\Gamma_\varepsilon$  : parte exterior de una esfera de radio  $\varepsilon$  con centro en  $\xi$ ).

$\delta_{ij}$ : función Delta de Kronecker.

La solución fundamental  $P_{ij}^*(\xi, \mathbf{x})$  presenta una singularidad[4] fuerte cuando  $\xi \rightarrow x$ , mientras la

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} P_i^*(\xi, x)d\Gamma(x) \quad (2)$$

con:

singularidad de  $U_{ij}^*(\xi, \mathbf{x})$  es débil. Debido a lo anterior las integrales del miembro izquierdo de (1) se consideran en el sentido del valor principal de Cauchy[4, 8] y las restantes se toman en el sentido normal de integración.

La integral en el dominio( $\Omega$ ) se puede transformar[1] en una integral en el contorno( $\Gamma$ ) utilizando el teorema de Gauss, con lo que se llega a la expresión:

$$P_i^*(\xi, x) = \frac{1}{8\pi G} \left( b_i \frac{\partial r}{\partial x_k} n_k - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial r}{\partial x_k} b_k n_i \right).$$

Esta es la ecuación integral de partida y es válida para los casos de contorno finito e infinito.

## 2.Desarrollo

Los pasos básicos involucrados, que en esta aproximación constituyen la esencia numérica del Método de los Elementos de Contorno son:

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \sum_{k=1}^{ne} \int_{\Gamma_k} P_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) = \sum_{k=1}^{ne} \int_{\Gamma_k} U_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) + \sum_{k=1}^{ne} \int_{\Gamma_k} P_i^*(\xi, x)d\Gamma(x) \quad (3)$$

Donde ne representa el número de elementos. Por otro lado, para conseguir el grado de interpolación necesario para aproximar las variables de campo, se

### Discretización.

Se define el elemento de contorno a utilizar, para lo cual se decide el conjunto de funciones básicas a utilizar para aproximar tanto las variables de campo como las coordenadas.

Esto significa por una parte que el contorno se subdivide por una serie de elementos del contorno, obteniéndose la ecuación:

definen en cada elemento el número de nodos precisos. En general los elementos son compatibles, en el sentido de que elementos vecinos comparten las aristas. En lo sucesivo se supone que los elementos son triangulares y que las coordenadas, la presión y el desplazamiento varían linealmente en los mismos.

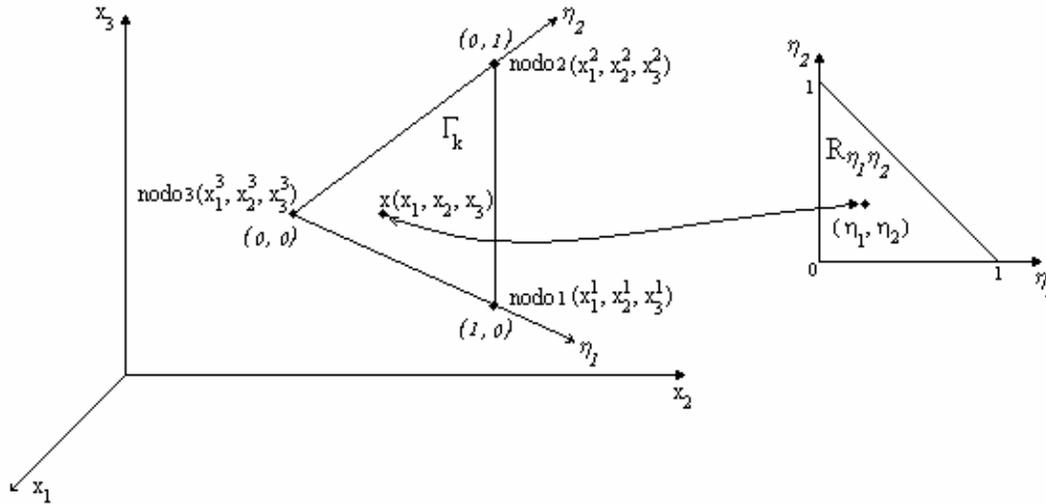


Fig.2 Transformación de coordenadas

En cada elemento  $\Gamma_k$  se define el sistema de coordenadas local  $(\eta_1, \eta_2)$  que se observa en la Fig.2. Introduciendo la variable dependiente  $\eta_3 = 1 - \eta_1 - \eta_2$  se obtienen las ecuaciones que transforman la región

$R_{\eta_1\eta_2}$  en  $\Gamma_k$ , y donde  $x_i^j$ ,  $u_i^j$  y  $p_i^j$  representan la coordenada, desplazamiento y presión en la dirección del eje  $x_i$  del vértice  $j$  del elemento.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 & u_1^3 \\ u_2^1 & u_2^2 & u_2^3 \\ u_3^1 & u_3^2 & u_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1^1 & p_1^2 & p_1^3 \\ p_2^1 & p_2^2 & p_2^3 \\ p_3^1 & p_3^2 & p_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

La ecuación vectorial de  $\Gamma_k$  es entonces:

$$\mathbf{r} = \sum_{j=1}^3 (x_j^1 \eta_1 + x_j^2 \eta_2 + x_j^3 \eta_3) \mathbf{i}_j \quad (5)$$

Donde  $\mathbf{i}_j$  representa el vector unitario en la dirección del eje  $x_j$ .

El jacobiano de la transformación es:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_2} \right| = \sqrt{\sum_{(ijk)=(123), (231), (312)} [(x_j^1 - x_j^3)(x_k^2 - x_k^3) - (x_j^2 - x_j^3)(x_k^1 - x_k^3)]^2} \quad (6)$$

y un vector normal unitario a  $\Gamma_k$ :

$$\mathbf{n} = \frac{\sum_{(ijk)=(123), (231), (312)} [(x_j^1 - x_j^3)(x_k^2 - x_k^3) - (x_j^2 - x_j^3)(x_k^1 - x_k^3)] \mathbf{i}_i}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_2} \right|} \quad (7)$$

Se debe destacar que el orden en que se tomen los nodos en el elemento influye en la dirección del vector normal que se obtenga, por lo que deben tomarse de modo que  $\mathbf{n}$  apunte en la dirección del vector unitario exterior.

Las expresiones de  $r = r(x, \xi)$  (distancia entre los puntos  $x$  y  $\xi$ ),  $\frac{\partial r}{\partial x_i}$  y  $\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}$  en función de los parámetros  $\eta_1, \eta_2$  y  $\eta_3$  están dadas por:

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i^1 \eta_1 + x_i^2 \eta_2 + x_i^3 \eta_3 - \xi_i)^2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i^1 \eta_1 + x_i^2 \eta_2 + x_i^3 \eta_3 - \xi_i}{r} \quad (9)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial r}{\partial x_i} n_i \quad (10)$$

Debido a la transformación de coordenadas para la integral del miembro izquierdo de (3) se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_k} P_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) &= \iint_{R_{\eta_1 \eta_2}} P_{ij}^*(\xi, \eta_1, \eta_2) (u_j^1 \eta_1 + u_j^2 \eta_2 + u_j^3 \eta_3) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_2} \right| d\eta_1 d\eta_2 = \\ &= \sum_{m=1}^3 \left( \iint_{R_{\eta_1 \eta_2}} P_{ij}^*(\xi, \eta_1, \eta_2) \eta_m \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_2} \right| d\eta_1 d\eta_2 \right) u_j^m = \sum_{m=1}^3 h_{ijk}^m u_j^m \end{aligned}$$

donde:

$$h_{ijk}^m = \iint_{R_{\eta_1\eta_2}} P_{ij}^*(\xi, \eta_1, \eta_2) \eta_m \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_2} \right| d\eta_1 d\eta_2$$

De modo similar las integrales del miembro derecho de (3) quedan expresadas en la forma:

$$\int_{\Gamma_k} P_i^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \iint_{R_{\eta_1\eta_2}} P_i^*(\xi, \eta_1, \eta_2) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_2} \right| d\eta_1 d\eta_2 = b_{ik}$$

$$\int_{\Gamma_k} U_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) = \sum_{m=1}^3 \left( \iint_{R_{\eta_1\eta_2}} U_{ij}^*(\xi, \eta_1, \eta_2) \eta_m \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_2} \right| d\eta_1 d\eta_2 \right) p_j^m = \sum_{m=1}^3 g_{ijk}^m p_j^m$$

Donde:

$$g_{ijk}^m = \iint_{R_{\eta_1\eta_2}} U_{ij}^*(\xi, \eta_1, \eta_2) \eta_m \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_2} \right| d\eta_1 d\eta_2$$

### Generación del sistema de ecuaciones.

El conjunto finito de parámetros de las funciones básicas que determinan la solución aproximada se calcula de un sistema finito de ecuaciones lineales. Para generar este sistema de ecuaciones en este trabajo se utiliza el método de colocación, que conlleva aplicar la ecuación (3) en cada punto nodal  $x$  en el contorno  $\Gamma$  ( $\xi =$  nodo 1, nodo 2, ..., nodo  $nn$ ) resultando tantas ecuaciones vectoriales como nodos en el contorno. En cada elemento donde  $\xi$  coincida con alguno de sus vértices, estos se reordenarán de modo que el nodo de índice 3 sea  $\xi$ .

Se necesita calcular las integrales resultantes sobre cada elemento  $\Gamma_k$  para cada uno de los  $nn$  nodos tomados en el contorno. En esta etapa se presentan problemas computacionales de importancia debido a la necesidad de calcular integrales singulares con precisión y rapidez.

Para  $\xi =$  nodo  $l$  ( $l = 1, 2, \dots, nn$ ) se obtienen:

$$h_{ijk}^{lm} = \iint_{R_{\eta_1\eta_2}} P_{ij}^*(\xi, \eta_1, \eta_2) \eta_m \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_2} \right| d\eta_1 d\eta_2$$

$$g_{ijk}^{lm} = \iint_{R_{\eta_1\eta_2}} U_{ij}^*(\xi, \eta_1, \eta_2) \eta_m \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_2} \right| d\eta_1 d\eta_2$$

$$b_{ik}^l = \iint_{R_{\eta_1\eta_2}} P_i^*(\xi, \eta_1, \eta_2) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta_2} \right| d\eta_1 d\eta_2$$

Se debe señalar que las integrales que en realidad necesitan ser calculadas en el sentido del valor principal de Cauchy son aquellas en las cuales  $\eta_m$  no sea cero cuando  $\xi \rightarrow x$ , por lo que en nuestro caso resulta ser solo  $h_{ijk}^{l3}$ . El cálculo de los coeficientes  $C_{ij}$  y las integrales singulares del tipo  $h_{ijk}^{l3}$  no es necesario al asumir las consideraciones de cuerpo rígido como se verá posteriormente.

### Construcción del sistema de ecuaciones.

Denote en lo sucesivo  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{p}$  vectores cuyas componentes respectivas  $u_s$  y  $p_s$  ( $s=3(t-1)+j$ ) representan el valor del desplazamiento y la presión en el nodo  $t$  y en la dirección del eje  $x_j$ .

En cada ecuación del sistema de ecuaciones se necesita unir la contribución de todos los elementos a cada valor  $u_s$  y  $p_s$  ( $s=1, 2, \dots, 3nn$ ) en un sólo término.

Las variables en el contorno se recogen respectivamente en los vectores que se han nombrado  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{p}$  y los valores de las integrales calculadas anteriormente se van almacenando en las correspondientes matrices  $H$  y  $G$  que multiplican a los

precitados vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{p}$ , y en el vector  $\mathbf{b}$ . Se forma así un sistema del tipo  $\mathbf{Hu} = \mathbf{Gp} + \mathbf{b}$ , donde en  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{p}$  se

almacenan tanto datos como incógnitas.

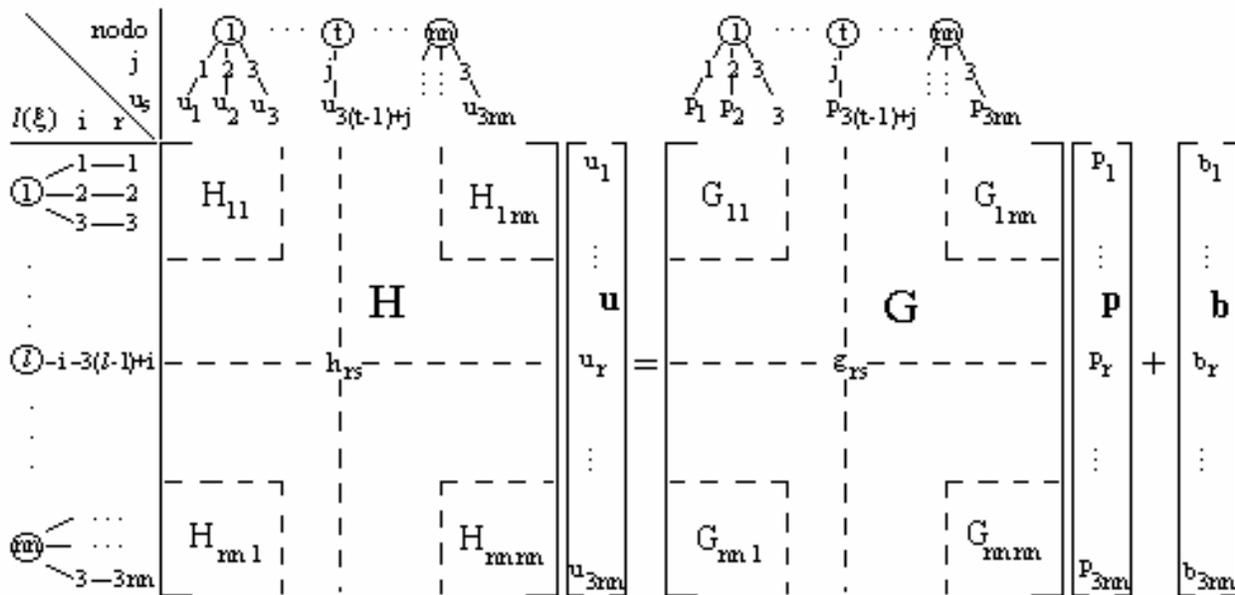


Fig.3. Estructura de la matriz del sistema de ecuaciones.

$$H = \left[ \left[ H_{lt} \right]_{3 \times 3} \right]_{mn \times mn} = \left[ h_{rs} \right]_{3mn \times 3mn} \quad G = \left[ \left[ G_{lt} \right]_{3 \times 3} \right]_{mn \times mn} = \left[ g_{rs} \right]_{3mn \times 3mn}$$

$$\mathbf{u} = \left[ u_s \right]_{1 \times 3mn} \quad \mathbf{p} = \left[ p_s \right]_{1 \times 3mn} \quad \mathbf{b} = \left[ b_s \right]_{1 \times 3mn}$$

De esta forma se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineales (Ver Fig.3) que involucran al conjunto de valores del desplazamiento y la presión en los nodos en el contorno.

Al imponer las condiciones de contorno (en cada nodo del contorno y en cada dirección se da como dato el desplazamiento o la presión),  $3mn$  valores nodales serán datos, resulta así un sistema de  $3mn$  ecuaciones con  $3mn$  incógnitas ( $u$ , si fue dato  $p$ , y viceversa).

El sistema de ecuaciones anterior puede reordenarse de forma que todas las incógnitas se escriban en el miembro izquierdo sobre un vector  $\mathbf{x}$ . Esto reduce el problema a una expresión familiar del tipo:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$$

cuya solución dará el resto de los valores en el contorno.

#### Solución del sistema de ecuaciones.

La matriz del sistema de ecuaciones resultante además

de llena es dominante por la diagonal, por lo que si su orden no es elevado (no mayor que 1000) se puede emplear un método de eliminación[3], por ejemplo el de Gauss. Si el número de ecuaciones es elevado resulta más conveniente emplear algún método iterativo[5, 6].

#### Cálculo de la solución en puntos interiores.

Expansión de la solución al interior del dominio, obteniendo así los valores de las magnitudes en puntos interiores seleccionados, al evaluar fórmulas que dependen sólo de la solución obtenida en el contorno.

Los desplazamientos en un punto interior  $\xi$  se pueden obtener de la expresión en la cual no se presentan singularidades, y por consiguientes todas las integrales pueden ser calculadas empleando cuadraturas numéricas:

$$u(\xi) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} U_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Gamma(x)$$

**Cálculo de los coeficientes  $C_{ij}$  y las integrales en el sentido del valor principal de Cauchy.**

Los coeficientes  $C_{ij}(\xi)$ , donde  $\xi$ =nodo  $l(l=1, 2, \dots, nn)$ , y las integrales singulares en el sentido del valor principal de Cauchy  $h_{ijk}^{l3}$  que aportan a la submatriz  $H_{ll}$  de la diagonal de  $H$  no son necesarias de calcular al asumir las consideraciones de cuerpo rígido en un cuerpo

acotado, que conducen a que  $\sum_{j=1}^{ne} H_{lj} = 0$ , de donde

se obtiene:

$$H_{ll} = - \sum_{j=1(\neq l)}^{ne} H_{lj}$$

Si el cuerpo no es acotado (contorno infinito) entonces resulta:

$$H_{ll} = I - \sum_{j=1(\neq l)}^{ne} H_{lj}$$

donde  $I$  es la matriz identidad.

**Cálculo de las integrales.**

Las integrales de las expresiones de  $h_{ijk}^{lm}$ ,  $g_{ijk}^{lm}$  y  $b_{ik}^l$  presentan singularidades en las soluciones fundamentales cuando el nodo  $l$  está

contenido en el elemento  $k$  que se analiza, lo que provoca que la distancia ( $r$ ) entre los puntos de carga y genérico sea nula. En estos casos las integrales se calculan analíticamente.

Las integrales que se calculan analíticamente resultan ser combinaciones lineales de integrales de la forma:

$$\iint_{R_{\eta_1\eta_2}} \frac{(\eta_1)^a (\eta_2)^b}{r} d\eta_1 d\eta_2 \quad \text{para } a+b=2$$

$$\iint_{R_{\eta_1\eta_2}} \frac{(\eta_1)^a (\eta_2)^b}{r^3} d\eta_1 d\eta_2 \quad \text{para } a+b=2$$

$$\iint_{R_{\eta_1\eta_2}} \frac{(\eta_1)^a (\eta_2)^b}{r^3} d\eta_1 d\eta_2 \quad \text{para } a+b=3$$

Donde  $a$  y  $b$  son números enteros no negativos.

Las integrales no singulares se calculan mediante cuadratura numérica[9, 10], por ejemplo la cuadratura de Gauss. El cálculo numérico se justifica en parte por la dificultad y lo tedioso del cálculo analítico, frente a lo sencillo de implementar computacionalmente la cuadratura de Gauss, con la cual se obtiene una gran exactitud.

La cuadratura utilizada se basa en la siguiente relación:

$$I = \int_0^1 \left( \int_0^{1-\eta_2} f(\eta_1, \eta_2, \eta_3) d\eta_1 \right) d\eta_2 \approx \sum_{i=1}^n f(\eta_1^i, \eta_2^i, \eta_3^i) w_i$$

donde:  $w_i$  son los coeficientes de ponderación,  $\eta_1^i, \eta_2^i$  y  $\eta_3^i$  las coordenadas del punto de integración  $i$  y  $n$  es el número total de puntos de integración.

**Organización de los cálculos.**

Existen dos variantes, en una de ellas se procede fijando un elemento y se calculan las contribuciones de

cada nodo, la otra es fijar el nodo y calcular las contribuciones de todos los elementos. Esta última es la que sigue el algoritmo de cálculo diseñado y para mayor eficiencia computacional, no se calculan las matrices  $H$  y  $G$  y el vector  $\mathbf{b}$ , sino que se ensamblan directamente en las matrices  $A$  y el vector  $\mathbf{f}$  del sistema. Nótese que ambas matrices,  $H$  y  $G$  son del mismo orden que  $A$ , por lo que el ensamble directo permite lograr un considerable ahorro de memoria y disminución del tiempo de ejecución.

**Algoritmo.**

For  $l = 1$  to  $nn$  ‘Para cada nodo  $\xi$

For k = 1 hasta ne 'Para cada elemento

**For i = 1 to 3 'Para cada dirección**

Calcular  $b_{ik}^l$  y ensamblar

Next i

For j = 1 to 3 'Para cada componente

For i = 1 to 3 'Para cada dirección

For m = 1 to 3 'Por cada vértice del elemento

Calcular  $h_{ijk}^{lm}$  si el nodo  $l$  no pertenece al elemento  $k$  o el nodo  $l$  pertenece al elemento  $k$  y  $m$  es distinto de 3, y ensamblar

Calcular  $g_{ijk}^{lm}$  y ensamblar

Next m

Next i

Next j

Next l

### Ensamblaje de A y f.

Previo al proceso de calculo y ensamblaje deben ser inicializados en cero la matriz del sistema de ecuaciones

A y el vector de los términos independientes f. Si el cuerpo no es acotado (frontera infinita) es necesario hacer el siguiente ajuste:

For l = 1 to nn

For j = 1 to 3 'Para cada componente

q = 3(l - 1) + j

For i = 1 to 3 'Para cada dirección

r = 3(l - 1) + i

Si  $u_q$  es incógnita, entonces  $a_{rq}=1$ , en caso contrario  $f_r=-u_q$

Next i

Next j

Al calcular un valor de  $h_{ijk}^{lm}$ ,  $g_{ijk}^{lm}$  o  $b_{ik}^l$  de inmediato son ensamblados en el sistema de ecuaciones en A o f.  $t$  representa el índice del nodo que resulta ser el vértice  $m$  del elemento  $k$  y se introduce a  $q, r$  y  $s$  tales que :

q = 3(l - 1) + j

r = 3(l - 1) + i

s = 3(t - 1) + j

Al calcular  $h_{ijk}^{lm}$  ( el nodo  $l$  no pertenece al elemento  $k$  o el nodo  $l$  pertenece al elemento  $k$  y  $m$  distinto de 3)

si  $u_s$  es incógnita, entonces

$$a_{rs} = a_{rs} + h_{ijk}^{lm}$$

en caso contrario,

$$f_r = f_r - h_{ijk}^{lm} u_s .$$

Si  $u_q$  es incógnita, entonces (por condición de cuerpo rígido):

$$a_{rq} = a_{rq} - h_{ijk}^{lm}$$

en caso contrario,

$$f_r = f_r + h_{ijk}^{lm} u_q .$$

Al calcular  $g_{ijk}^{lm}$  si  $p_s$  es incógnita, entonces:

$$a_{rs} = a_{rs} - g_{ijk}^{lm}, \text{ en caso contrario,}$$

$$f_r = f_r + g_{ijk}^{lm} p_s$$

Al calcular  $b_{ik}^l$  hacer  $f_r = f_r + b_{ik}^l$ .

Al calcular un valor de  $h_{ijk}^{lm}$ ,  $g_{ijk}^{lm}$  o  $b_{ik}^l$  de inmediato son ensamblados en el sistema de ecuaciones en A o f.  $t$  representa el índice del nodo que resulta ser el vértice  $m$  del elemento  $k$  y se introduce a  $q, r$  y  $s$  tales que :

q = 3(l - 1) + j

r = 3(l - 1) + i

s = 3(t - 1) + j

Al calcular  $h_{ijk}^{lm}$  ( el nodo  $l$  no pertenece al elemento  $k$ , o el nodo  $l$  pertenece al elemento  $k$  y  $m$  en distinto de 3) si  $u_s$  es incógnita, entonces:

$$a_{rs} = a_{rs} + h_{ijk}^{lm}$$

en caso contrario,

$$f_r = f_r - h_{ijk}^{lm} u_s.$$

Si  $u_q$  es incógnita, entonces (por condición de cuerpo rígido):

$$a_{rq} = a_{rq} - h_{ijk}^{lm}$$

en caso contrario,

$$f_r = f_r + h_{ijk}^{lm} u_q$$

Al calcular  $g_{ijk}^{lm}$  si  $p_s$  es incógnita, entonces:

$$a_{rs} = a_{rs} - g_{ijk}^{lm}, \quad \text{en caso contrario,}$$

$$f_r = f_r + g_{ijk}^{lm} p_s$$

Al calcular  $b_{ik}^l$  hacer  $f_r = f_r + b_{ik}^l$

### 3. Conclusiones

En este trabajo se brindan los algoritmos necesarios para la realización computacional del Método de los Elementos de Contorno aplicado en la teoría de la Elasticidad lineal, para medio homogéneo e isotópico considerando el efecto de las cargas másicas, en el que se consideran elementos triangulares y se emplea interpolación lineal. Sin la necesidad de grandes cambios se pueden obtener los algoritmos necesarios para utilizar otros tipos de elementos y funciones de interpolación.

### 4. Bibliografía

1. Brebbia, C.A., The Boundary Element Techniques, ed. 1, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
2. Goded, F., Teoría de la elasticidad lineal y sus funciones de tensión, ed 1, Ed. Dossat, Madrid, 1959.
3. Gómez, M.A., Métodos numéricos del álgebra lineal, Editorial academia, La Habana, 1987.
4. Guiggiani, M., Gigante, A., A general algorithm for multidimensional Cauchy Principal Value Integrals in the Boundary Element Method, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 57, 1990, pp. 906-915.
5. J. Baglama, Adaptively preconditioned GMRES algorithms, SIAM Journal on Sci. Comput., Vol. 20, 1998, pp. 243-269.
6. K. Davey, A generalized SOR method for dense linear systems of Boundary Element Equations, SIAM Journal on Sci. Comput., Vol. 19, 1998, pp. 953-967.
7. Love, A.E.H., A Treatise on the mathematical theory of elasticity, ed 1, Dover books, New York, 1944.
8. Mikalin, S.G., Integral equations, Instituto cubano del libro, 1971.
9. Pina, H.L.G., Fernández, J.L.M., and Brebbia, C.A., Some numerical integration formulae over triangles and squares with  $1/r$  singularity, Appl. Math. Modelling 5, 1981.
10. Stroud, A.H., and Secrest, D., Gaussian quadrature Formulas, Prentice-Hall, New York, 1966.

---

## Three dimension computational realization of the Method of the Contour elements in the Elasticity theory.

### Abstract

In this work is shown the computational formulation in three dimensions of the Boundary Element Method in 3D Elastostatic for isotropic, homogeneous and linear material considering the effect of body forces.

The computational formulation of the method is based on the discretization of the boundary into elements over which displacements and tractions are expressed in terms of interpolation functions. Applying the collocation method a system of lineal equations is obtained that brings the solution on the boundary, from which the solution in any point of the definition region of the problem can be obtained.

In the present work triangular elements are considered, lineal interpolation is employed, the transformation to homogeneal coordinates is used and it is shown the algorithms that guide to the assembling of the equations system that contributes to the solution on the boundary.

**Key words:** Contour element, computational realization, Triangular elements.