Algoritmo para el cálculo de la transformada Z inversa utilizando DERIVE

D. Galán Martínez, R. Brito González
Instituto Superior Politécnico *José A. Echeverría* (ISPJAE)
Calle 127 s/n, CUJAE, Marianao 15, Ciudad Habana, Cuba.
Teléfono: 53 7-20 2267, Fax: 53 7-27 7129.

(Ponencia recibida para ser presentada en el 2º Congreso Cubano de Ingeniería Mecánica, ISPJAE, Ciudad de la Habana, Septiembre 2000)

Resumen

Una de las herramientas matemáticas más utilizadas en ingeniería en el estudio de los denominados sistemas de control de datos muestreados es la transformada Z. La transformada Z como método operacional puede ser utilizada en la resolución de ecuaciones en diferencias finitas; las cuales formulan la dinámica de los sistemas de control de datos muestreados. Esta transformada juega un papel similar que el de la transformada de Laplace en el análisis de los sistemas de control de tiempo continuo.

El presente trabajo tiene como objetivo la confección de un programa para computadora digital, utilizando el asistente matemático DERIVE, para la determinación de la transformada Z inversa de una función algebraica racional, las cuales modelan matemáticamente los sistemas de control de datos muestreados lineales que aparecen con mucha frecuencia en el estudio de los procesos de ingeniería.

Palabras claves: Algoritmo, transformada Z, DERIVE, función algebraica racional, modelo matemático.

1. Desarrollo

La transformada Z de una función de variable discreta f(k); $k = 0, 1, 2, \cdots$ es definida por la serie de potencias de una variable compleja, que como es conocido converge para $|z| > R$, es decir, la región exterior a un círculo con centro en el origen y radio R en el plano complejo z. Como se puede apreciar, la transformada Z puede considerarse matemáticamente como un operador $\mathfrak{Z}: f \rightarrow F$ que transforma funciones definidas en el dominio de la variable discreta k en funciones definidas en el dominio de la variable compleja z.

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \cdots + f(k)z^{-k} + \cdots$$

Se debe destacar que, al aplicar transformada Z para resolver un problema presentado en un sistema físico de datos muestreados; ésta conduce desde el campo de las funciones objeto al campo de las imágenes, donde se realizan las operaciones correspondientes para resolver el problema dado, pero, posteriormente se hace necesario retornar al campo de las funciones objeto para dar la respuesta definitiva al problema. Este último paso presenta sus dificultades inherentes y reviste un gran interés tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Es por eso que el presente trabajo tiene como objetivo la confección de un programa para computadora digital utilizando el asistente matemático DERIVE, para el cálculo de la transformada Z inversa cuando $F(z)$ es una función racional algebraica, que son las que modelan matemáticamente los sistemas de control de datos muestreados ampliamente utilizados en el control digital de procesos tecnológicos, de accionamiento eléctrico y de telecomunicaciones.

El retorno desde el campo de las imágenes al campo de las funciones objeto se realiza mediante la aplicación de la transformada Z inversa dada por:

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[F(z)\right];\ k = 0, 1, 2, \cdots$$

Existen diversos métodos para el cálculo de la transformada Z inversa de una función; en este trabajo se centra la atención al método computacional.

El método computacional es empleado en la práctica cuando se desea encontrar, de una forma eficiente y rápida con el auxilio de una computadora digital, un número finito de términos de la transformada Z inversa de una función F y puede ser utilizado cuando F(z) es una función racional algebraica en la cual el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador. La esencia del método radica en convertir la función F(z) dada en una ecuación en diferencias finitas lineal con coeficientes constantes y posteriormente resolver la ecuación obtenida mediante la confección de un programa de computación digital.

La desventaja inherente del método computacional está en el hecho de mediante la aplicación del mismo no se obtiene una expresión general, en forma compacta, para la transformada Z inversa.

Obsérvese la esencia del método.

Si se tiene que:

$$F(z) = \frac{b_o z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m} \qquad (1)$$

Donde n y m son números naturales tales que n ≤ m. Entonces la función *F*(z) puede ser escrita en la forma:

$$F(z) = \frac{b_o z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m} U(z) \qquad (2)$$

Donde *U*(z)=1, pero, se debe tener presente que para que *U*(z) sea igual a uno debe suceder que:

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k} = u(0) + u(1) z^{-1} + \cdots + u(k) z^{-k} + \cdots$$

Siendo u(0)=1 y u(k)=0 si k=1, 2 ,3, . . .

Puede demostrarse que la expresión (2) se puede convertir en una ecuación en diferencias finitas lineal de orden m con coeficientes constantes de la forma:

$$f(k+m) + a_1 f(k+m-1) + a_2 f(k+m-2) + \cdots + a_m f(k) = b_0 u(k+n) + b_1 u(k+n-1) + \cdots + b_n u(k) \qquad (3)$$

Que se debe resolver sujeta a **m** condiciones consecutivas) f(0), f(1), . . ., f(m-1).

Las m condiciones consecutivas f(0), f(1), . . ., f(m-1) deben ser obtenidas a partir de la ecuación (3) evaluando en orden sucesivamente en la misma para $k = -m, -m+1, \cdots, k = -2, k = -1$;

Y así se obtendrían en orden f(0), f(1), . . ., f(m-1). Es importante destacar que se debe tener en cuenta que, en todo el proceso de evaluación, los valores de las funciones f y u son iguales a cero para valores negativos de sus argumentos.

Se ilustra por simplicidad y a manera de ejemplo, el procedimiento descrito anteriormente para el caso en que $n = m = 2$; en tal caso

$$F(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} U(z) \qquad (4)$$

Donde: *U*(z)=1

$$u(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[U(z)\right] = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 0 \\ 0 & \text{si} \quad k = \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$

La expresión (4) se convierte en la ecuación en diferencias finitas:

$$f(k+2) + a_1 f(k+1) + a_2 f(k) = b_0 u(k+2) + b_1 u(k+1) + b_2 u(k) \qquad (5)$$

Donde, evaluando sucesivamente para valores de $k = -2$ y $k = -1$ se obtiene que:

$f(0) = b_0$ y $f(1) = b_1 - a_1 b_0$.

Aplicando transformada Z a ambos miembros de la ecuación (5) y en virtud del teorema de linealidad y el de traslación real a la izquierda para la transformada Z, se tiene que:

$$z^2F(z)-z^2f(0)-zf(1)+a_1[zF(z)-zf(0)]+a_2F(z)=b_0[z^2U(z)-z^2u(0)-zu(1)]$$
$$+b_1[zU(z)-zu(1)]+b_2U(z)$$

Sustituyendo los valores de f(0) y f(1) en la ecuación anterior y simplificando se tiene que:

$$z^2F(z)+a_1zF(z)+a_2F(z)=b_0z^2U(z)+b_1zU(z)+b_2U(z)$$

y así despejando F(z) se tiene finalmente que:

$$F(z)=\frac{b_0z^2+b_1z+b_2}{z^2+a_1z+a_2}U(z):$$

La expresión anterior coincide con la dada por (4); que es lo que se quiere mostrar.

Como se puede apreciar, el problema de la determinación de la transformada Z inversa de una F(z) dada por la expresión (1) se reduce al problema de Cauchy de resolver la ecuación en diferencias finitas (3) sujeta a las m condiciones consecutivas especificadas.

La ecuación (3) se puede resolver mediante un programa para computadora digital utilizando cualquiera de los lenguajes de programación conocidos de uso frecuente al resolver problemas científicos; por ejemplo, FORTRAN, BASIC, PASCAL, C, Borlan Delphi, etc.

En este trabajo, para elaborar el algoritmo de determinación de la transformada Z inversa, no se utilizará un lenguaje de programación específico, sino, un lenguaje auxiliar de los denominados de pseudocódigo. Estos lenguajes de pseudocódigo son muy cómodos de usar y en ellos se obvian los estrictos detalles inherentes a cualquier lenguaje de programación y en ello radica las ventajas de su utilización.

Recordar que el problema a resolver es la determinación de un número finito de términos de la transformada Z inversa de la función racional algebraica

$$F(z)=\frac{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_n}{z^m+a_1z^{m-1}+\cdots+a_m}$$

Con $n\le m$.

Llámese:

J: Cantidad de valores de $f(k)=\mathcal{Z}^{-1}[F(z)]$ que se desean obtener.

n: Grado del polinomio del numerador de F(z).

m: Grado del polinomio del denominador de F(z).

$b_i;\ i=0,1,2,\cdots,n$: Valores de los coeficientes del polinomio del numerador de F(z) comenzando por el término de grado n.

$a_i;\ i=1,2,\cdots,m$: Valores de los coeficientes del polinomio del denominador de F(z) comenzando por el término de grado $m-1$.

Y así utilizando un lenguaje de pseudocódigo se tendría el siguiente algoritmo general:

Lectura de valores iniciales: J, n, m, $b_i;\ i=0,1,2,\cdots,n$; $a_i;\ i=1,2,\cdots,m$.

FOR $k=-m$ **TO** -1

$f_k=0$

END

IF $k=0$ **THEN**

$u_k=1$

ELSE

$u_k=0$

END

FOR $k=0$ **TO** $J-1$

$$f_k=\sum_{i=0}^{n}b_iu_{k-m+n-i}-\sum_{i=1}^{m}a_if_{k-i} \quad (6)$$

END

Mostrar f_k

Utilizando el asistente matemático DERIVE, teniendo en cuenta el algoritmo del pseudocódigo adoptado anteriormente y las especificidades de la programación en DERIVE, se confeccionó un programa que se denominó TZINV cuyas instrucciones son las siguientes:

$$1)\ F(a,b,m,n,k) := IF(k<0,\ 0,\ \sum_{i=0}^{n} ELEMENT(b,i+1)\,IF\,(-i+n-m+k=0,\ 1,\ 0)$$
$$-\sum_{i=1}^{m} ELEMENT(a,\ i)F(a,\ b,\ m,\ n,\ k-i))$$

$$2)\ TZINV(a,\ b,\ m,\ n,\ j) := VECTOR([k,\ F(a,\ b,\ m,\ n,\ k)],\ k,\ 0,\ j-1)$$

Donde a y b son dados en forma de vector, es decir, $a=[a_1, a_2, \cdots, a_m]$ y $b=[b_0, b_1, \cdots, b_n]$, **m** y **n** son los grados del polinomio del denominador y del numerador de *F*(z), respectivamente.

Ejemplo 1:

Utilizar el asistente matemático DERIVE para determinar los 15 primeros valores de:

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z+2}{(z+1)(z-2)}\right].$$

Solución:

En este caso:

$$F(z) = \frac{z+2}{z^2-z-2}$$

De donde se puede observar que:

Entonces se debe plantear la siguiente instrucción en el software DERIVE:

$$TZINV([-1,\ -2],\ [1,\ 2],\ 2,\ 1,\ 15)$$

Los resultados de los cálculos se encuentran reflejados en la tabla 1.

Tabla 1 Resultados dados por DERIVE para el ejemplo 1.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
f(k)	0	1	3	5	11	21	43	85

8	9	10	11	12	13	14
171	341	683	1365	2731	5461	10923

Ejemplo 2:

Utilizar el asistente matemático DERIVE para determinar los 10 primeros valores de:

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^3+2z^2+z+1}{z^3-z^2-8z+12}\right].$$

Solución:

En este caso se tiene que

$$F(z) = .\frac{z^3+2z^2+z+1}{z^3-z^2-8z+12}$$

De donde se puede observar que:

$$n=3,\ m=3,\ b_0=1,\ b_1=2,\ b_2=1,\ b_3=1,\ a_1=-1,\ a_2=-8\ \text{y}\ a_3=12,$$

Entonces se debe plantear la siguiente instrucción en el software DERIVE:

$$TZINV([-1,\ -8,\ 12],\ [1,\ 2,\ 1,\ 1],\ 3,\ 3,\ 10)$$

Los resultados de los cálculos con DERIVE se encuentran reflejados en la tabla 2.

Tabla 2 Resultados dados por DERIVE para el ejemplo 2.

k	0	1	2	3	4
f(k)	1	3	12	25	85

5	6	7	8	9
141	521	629	3105	1885

2. Conclusiones

Como se puede apreciar, mediante el programa presentado en este trabajo para un ordenador digital utilizando el software DERIVE, puede ser calculada la transformada Z inversa de cualquier función racional algebraica de una forma relativamente sencilla y rápida, sobre todo, cuando se deseen determinar pocos términos de la misma, como en ocasiones es requerido en la práctica. El programa desarrollado puede ser útil para ingenieros y profesionales que se dediquen al control de procesos tecnológicos mediante el procesamiento digital de señales.

3. Bibliografía

1. Alvarez M. Y otros, Matemática Numérica, L a Habana, Editorial Felix Varela, 1998.
2. Brito R., Valido I., Introducción a las ecuaciones en diferencias finitas, UNEXPO, Barquisimeto, Venezuela, 1995.
3. Cadzow J. A., Discrete-times systems, an introduction with interdisciplinary applications, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1973.
4. Derrick W. R., Variable Compleja con Aplicaciones, Segunda Edición, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1989.
5. Jury E. I., Theory and application of the z-transform method, New York, John Wiley &, Sons, Inc 1984.
6. Ogata K., Ingeniería de control moderna, La Habana, Edición Revolucionaria, 1984.
7. Ogata K., Discrete-Time systems, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1990.

Algorithm for the calculation of the transformed inverse Z using the mathematical assistant DERIVE.

Abstract

One of the mathematical tools more used in engineering in the study of the denominated systems of data control samples is the transformed Z. The transformed Z like as an operational method can be used in the resolution of equations in finite differences; which formulate the dynamics of the systems of data control samples. This transformed plays a similar paper that the Laplace transformed in the analysis of the systems of control in continuous time.

The present work has as objective the confection of a program for digital computer, using the mathematical assistant DERIVES, for the determination of the Z inverse transformed of a rational algebraic function, which model mathematically the systems of lineal data control samples that appear very frecuently in the study of the engineering processes

Key words: algorithm, Z inverse transformed, Derives, Digital computer program, Rational algebraic function, mathematical model.