

# Estudio de las curvas epicicloide y evolvente para formar el perfil de los engranajes que operan con distancia entre centros variable

**L. I. Negrín Hernández, R. Franco Rodríguez.**

Departamento de Mecánica Aplicada y Dibujo, Facultad de Ing. Mecánica  
Universidad Central de Las Villas "Marta Abreu", Santa Clara, Cuba.  
Telef: 53-422-81630, FAX: 53-422-81608  
Email: linegrin@uclv.etcusa.cu

(Ponencia recibida para ser presentada en el 2º Congreso Cubano de Ingeniería Mecánica, ISPJAE, Ciudad de la Habana, Septiembre 2000)

## Resumen

En este trabajo se realiza un estudio de las curvas epicicloidales y evolventes de círculo en sus formas generales, con el objetivo de formar el perfil de trabajo de los dientes de los engranajes que operan con distancia entre centros variable. Se parte de las expresiones generales de estas curvas y se desarrollan las fórmulas para determinar algunas propiedades de las mismas, como el radio de curvatura, la involuta, etc. Aquí se realiza también la demostración de que la evolvente de círculo es un caso particular de la epicicloide, demostración que no aparece en la literatura especializada. Con posterioridad se hace una comparación teniendo en cuenta las propiedades cinemáticas de los engranajes formados por las diferentes curvas. Como conclusiones del trabajo se plantea que la evolvente de círculo común tiene las mejores propiedades para engranajes que trabajan con una variación de la distancia entre centros menor que el 5 %, mientras que la epicicloide alargada garantiza un mejor funcionamiento para engranajes que trabajen con una variación entre el 5 y el 10 %.

**Palabras claves:** epicicloide, involuta, , diente de engranaje, geometría de engranaje.

## 1. Introducción

Los dientes de las transmisiones que trabajan con distancia entre centros variable deben ser mas largos que los de las transmisiones comunes [6]. En la bibliografía especializada consultada solamente se tratan las curvas epicicloidales y evolventes "comunes", en cuyos casos el aumento del radio exterior está limitado por el espesor de la punta del diente; y la disminución del radio interior no repercute en la zona de trabajo, una vez que su valor es inferior al radio de la circunferencia básica. Sin embargo, este último aspecto cambia si se consideran las expresiones generales de estas curvas en su formulación "alargada", lo cual no ha sido estudiado por los autores consultados. Esta formulación general tiene la ventaja de que incluye también la posibilidad de estudiar las curvas "comunes" como se verá en el desarrollo del trabajo.

Antes de pasar a analizar estas curvas como perfil de los dientes de engranajes resulta necesario determinar algunas de sus propiedades como entidades geométricas. Dentro de estas propiedades tienen vital importancia su forma geométrica, los radios de curvatura en los

diferentes puntos y los centros de los círculos osculadores.

## 2. Curvas epicicloidales

La ecuación general de estas curvas, expresada en su forma paramétrica según [9], puede escribirse de la siguiente forma (ver Fig.1.):

$$\begin{aligned} x &= (r_o + r_g) \cos \varphi - (r_g + d) \cos \left( \frac{r_o + r_g}{r_g} \varphi \right) \\ y &= (r_o + r_g) \sin \varphi - (r_g + d) \sin \left( \frac{r_o + r_g}{r_g} \varphi \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Donde:

$r_o$  – Radio de la circunferencia básica (directriz).

$r_g$  – Radio de la circunferencia generatriz.

$\varphi$  - Angulo que forma la línea que une el centro de coordenadas con el punto en contacto de las dos circunferencias respecto al eje horizontal (parámetro de la ecuación).

$d$  – Distancia del punto que describe la curva, medida a partir del borde de la circunferencia generatriz.

Atendiendo a los valores de “ $d$ ” pueden darse los siguientes casos:

$d = 0 \Rightarrow$  epicicloide común.

$d > 0 \Rightarrow$  epicicloide alargada (caso que se muestra en la Fig.1.)

$d < 0 \Rightarrow$  epicicloide acortada.

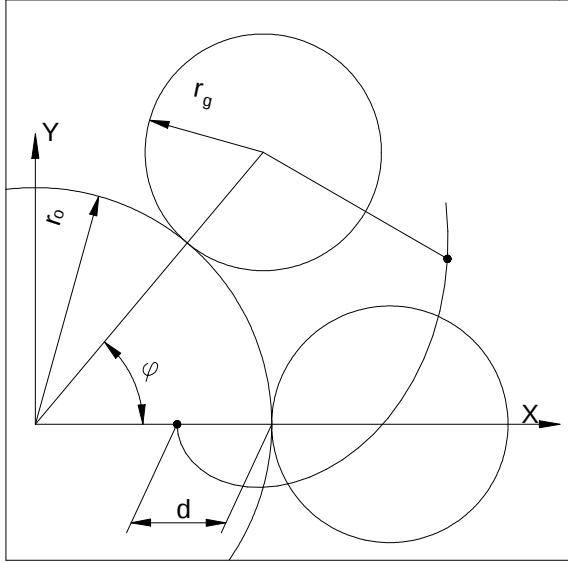


Fig. 1. Curva epicicloidal.

En [9] solamente se enuncian las expresiones generales (1) y se clasifican, pero no se determina ninguno de los parámetros mencionados anteriormente. En el resto de los textos consultados, incluyendo los de Geometría Analítica, no se hace mención siquiera a la existencia de estas expresiones generales. No obstante, estos parámetros pueden calcularse aplicando las ecuaciones deducidas para cualquier curva plana.

El radio de curvatura de una curva plana, dada en ecuaciones paramétricas, se determina por la siguiente expresión [7, 9, 10, 11, 12]:

$$r = \frac{\left[ \left( \frac{dx}{d\phi} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\phi} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \left( \frac{dx}{d\phi} \right) \cdot \left( \frac{d^2y}{d\phi^2} \right) - \left( \frac{d^2x}{d\phi^2} \right) \cdot \left( \frac{dy}{d\phi} \right) \right|} \quad (2)$$

Donde:

$$\left( \frac{dx}{d\phi} \right), \left( \frac{dy}{d\phi} \right) -$$

Primera derivada de las coordenadas con respecto al parámetro de la ecuación.

$$\left( \frac{d^2x}{d\phi^2} \right), \left( \frac{d^2y}{d\phi^2} \right) -$$

Segunda derivada de las coordenadas con respecto al parámetro de la ecuación.

En el caso de las curvas epicicloides (1), sería:

$$\frac{dx}{d\phi} = -(r_o + r_g) \sin \phi + \frac{(r_g + d)(r_o + r_g)}{r_g} \sin \left( \frac{r_o + r_g}{r_g} \phi \right) \quad (3)$$

$$\frac{dy}{d\phi} = (r_o + r_g) \cos \phi - \frac{(r_g + d)(r_o + r_g)}{r_g} \cos \left( \frac{r_o + r_g}{r_g} \phi \right)$$

$$\frac{d^2x}{d\phi^2} = -(r_o + r_g) \cos \phi + \frac{(r_g + d)(r_o + r_g)^2}{r_g^2} \cos \left( \frac{r_o + r_g}{r_g} \phi \right) \quad (4)$$

$$\frac{d^2y}{d\phi^2} = -(r_o + r_g) \sin \phi - \frac{(r_g + d)(r_o + r_g)^2}{r_g^2} \sin \left( \frac{r_o + r_g}{r_g} \phi \right)$$

Sustituyendo (3) y (4) en (2) y agrupando términos semejantes:

$$r = \frac{\left\{ (r_o + r_g)^2 \cdot \left[ 1 + \frac{(r_g + d)^2}{r_g^2} - 2 \cdot \frac{r_g + d}{r_g} \cdot \cos\left(\frac{r_o}{r_g} \varphi\right) \right] \right\}^{\frac{3}{2}}}{\left| (r_o + r_g)^2 \cdot \left[ 1 + \frac{(r_g + d)^2 (r_o + r_g)}{r_g^3} - \frac{(r_g + d)(r_o + 2r_g)}{r_g^2} \cdot \cos\left(\frac{r_o}{r_g} \varphi\right) \right] \right|} \quad (5)$$

Las coordenadas (m, n) del centro del círculo osculador de una curva plana pueden calcularse de la siguiente forma [7, 9, 10, 11, 12]:

$$m = x - \frac{dy}{d\varphi} \frac{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)\left(\frac{d^2y}{d\varphi^2}\right) - \left(\frac{d^2x}{d\varphi^2}\right)\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)} \quad (6)$$

$$n = y - \frac{dx}{d\varphi} \frac{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)\left(\frac{d^2y}{d\varphi^2}\right) - \left(\frac{d^2x}{d\varphi^2}\right)\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)} \quad (7)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1), (3) y (4) en (6) y (7) respectivamente se obtiene:

$$m = (r_o + r_g) \cdot \left(1 - \frac{A}{B}\right) \cdot \cos \varphi - (r_g + d) \cdot \left[1 - \frac{(r_o + r_g) \cdot A}{r_g \cdot B}\right] \cdot \cos\left(\frac{r_o + r_g}{r_g} \varphi\right) \quad (8)$$

$$n = (r_o + r_g) \cdot \left(1 - \frac{A}{B}\right) \cdot \sin \varphi - (r_g + d) \cdot \left[1 - \frac{(r_o + r_g) \cdot A}{r_g \cdot B}\right] \cdot \sin\left(\frac{r_o + r_g}{r_g} \varphi\right) \quad (9)$$

Donde:

$$A = (r_o + r_g)^2 \cdot \left[1 + \frac{(r_g + d)^2}{r_g^2} - 2 \frac{r_g + d}{r_g} \cdot \cos\left(\frac{r_o}{r_g} \varphi\right)\right] \quad (10)$$

$$B = (r_o + r_g)^2 \cdot \left[1 + \frac{(r_g + d)^2 (r_o + r_g)}{r_g^3} - \frac{(r_g + d)(r_o + 2r_g)}{r_g^2} \cdot \cos\left(\frac{r_o}{r_g} \varphi\right)\right] \quad (11)$$

### 3. Curvas evolventes de círculo

Si el círculo rodante (circunferencia generatriz) se convierte en una recta, entonces la curva epicicloidal da origen a la evolvente de círculo. Esta afirmación, por simple inspección, parece lógica, pero en ninguno de los textos consultados se demuestra; menos aún teniendo en cuenta su formulación general. Para que se tenga una idea más clara de la relación o parentesco de estas curvas, a continuación se presentará esta demostración.

Para que la circunferencia generatriz se convierta en una recta tendría que ser su radio de longitud infinita, por lo que las ecuaciones de la evolvente deberán

obtenerse aplicando este límite a la expresión general de la epicicloide (1); esto es:

$$x = \lim_{r_g \rightarrow \infty} \left[ (r_o + r_g) \cdot \cos \varphi - (r_g + d) \cdot \cos\left(\frac{r_o + r_g}{r_g} \varphi\right) \right]$$

A la ecuación de la coordenada y se le aplica el mismo procedimiento y como resultado se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= (r_o - d) \cos \varphi + r_o \cdot \varphi \cdot \sin \varphi \\ y &= (r_o - d) \sin \varphi - r_o \cdot \varphi \cdot \cos \varphi \end{aligned} \quad (12)$$

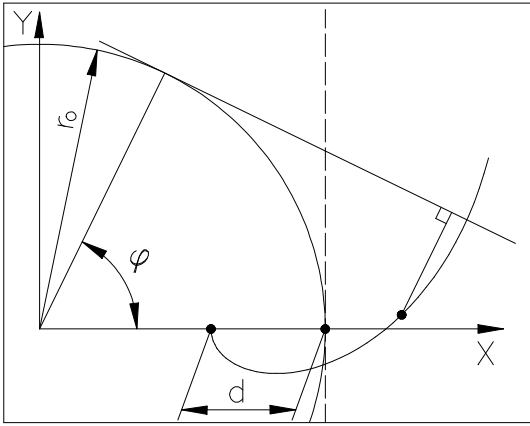


Fig. 2. Curva evolvente de círculo.

Las ecuaciones (12) coinciden con las planteadas en [9] como ecuaciones paramétricas generales de la evolvente de círculo, lo cual puede verificarse con la ayuda de la Fig. 2. La evolvente de círculo, de acuerdo con el valor de la distancia  $d$ , se clasifica, al igual que la epicloide, en: común, alargada y acortada. La demostración realizada permite afirmar que las curvas evolventes de círculo son un caso especial de las curvas epicicloides, cuando el radio generatriz toma valor infinito.

La evolvente de círculo, en su formulación general, tampoco es tratada en la bibliografía referida, por lo que resulta necesario establecer las expresiones que determinan su radio de curvatura y el centro del círculo osculador. Esto se hace de forma análoga a las curvas epicicloides, partiendo de (2), (6) y (7).

Para la evolvente de círculo dada por (12), se obtiene:

$$r = \frac{(d^2 + r_0^2 \cdot \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{|d^2 + r_0^2 \cdot \varphi + d \cdot r_0|} \quad (13)$$

$$m = [r_0 - d \cdot (1 - A)] \cdot \cos \varphi + r_0 \cdot \varphi \cdot (1 - A) \cdot \sen \varphi \quad (14)$$

$$n = [r_0 - d \cdot (1 - A)] \cdot \sen \varphi - r_0 \cdot \varphi \cdot (1 - A) \cdot \cos \varphi \quad (15)$$

Donde:

$$A = \frac{d^2 + r_0^2 \cdot \varphi^2}{d^2 + r_0^2 \cdot \varphi^2 + d \cdot r_0} \quad (16)$$

#### 4. Comparación entre las curvas epicicloides y evolventes de círculo

A continuación se realiza una comparación entre los diferentes tipos de curvas analizadas anteriormente, de manera que pueda tenerse una idea más clara de su posible empleo en los perfiles de los dientes.

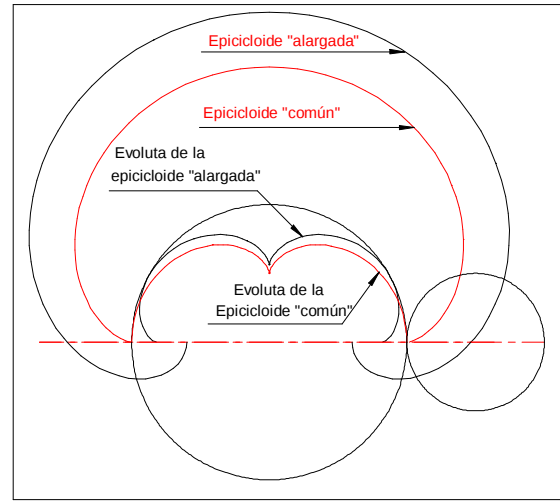


Fig.3. Comparación entre las epicicloides.

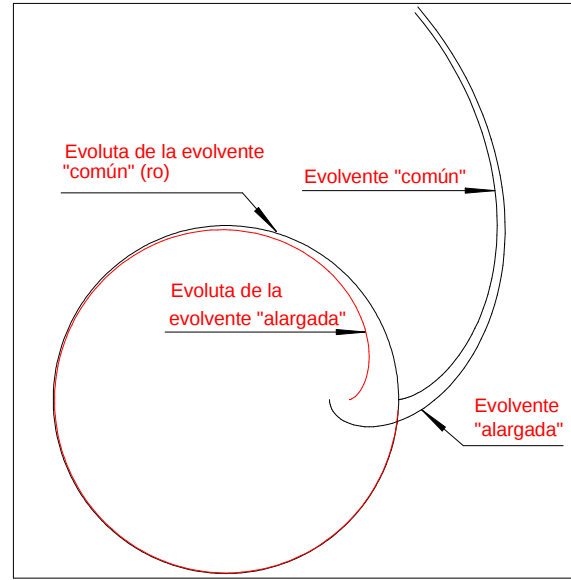


Fig.4. Comparación entre las evolventes.

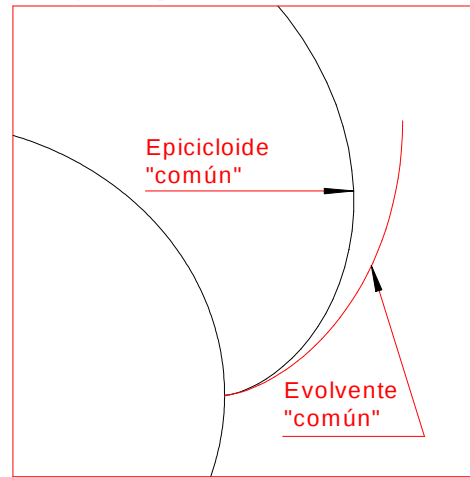


Fig.5. Comparación entre la epicloide y evolvente comunes.

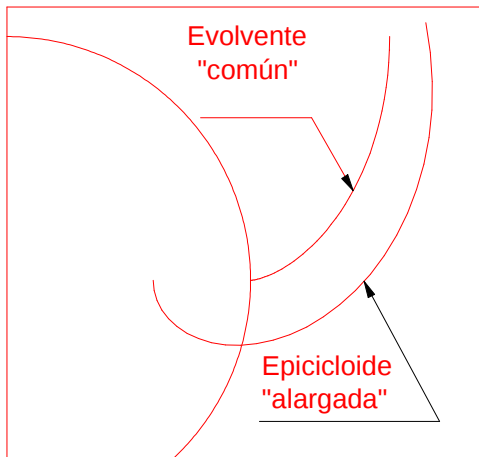


Fig.6. Comparación entre la epícicloide "alargada" y la evolvente "común".

Además de la comparación desde el punto de vista gráfico, también se compararon a partir de las propiedades que le confieren a los engranajes formados por ellas.

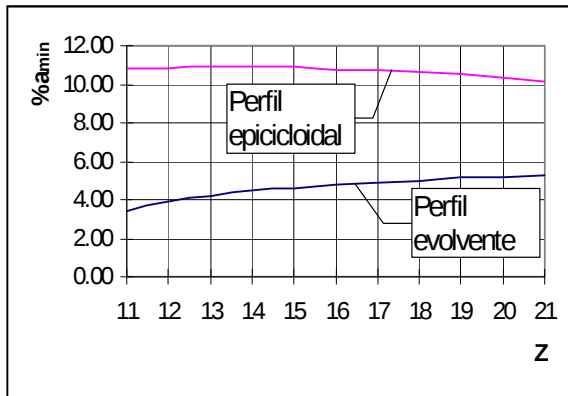


Fig. 7. Variación de la distancia entre centros vs número de dientes Z (u = 1).

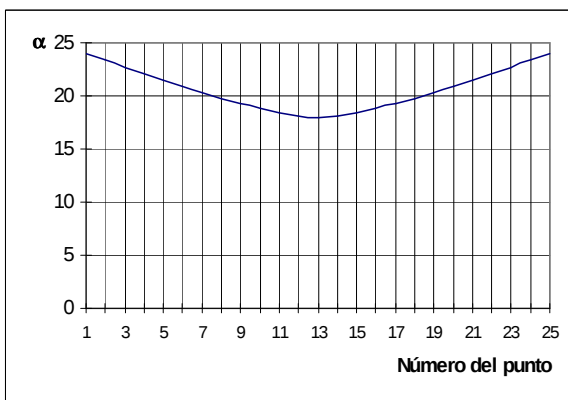


Fig.8. Angulo de presión ( $\alpha$ ) vs punto de la línea de engranaje en el perfil epícicloidial alargado.

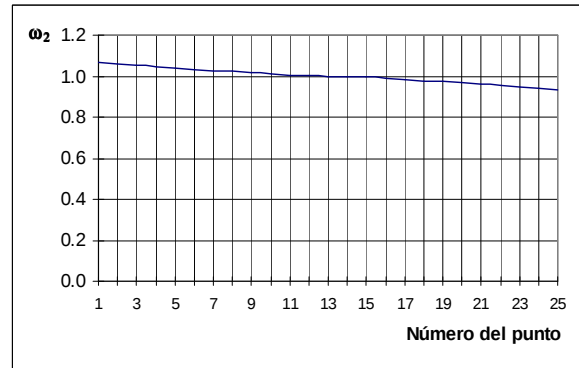


Fig. 9. Velocidad angular ( $\omega_2$ ) vs punto de la línea de engranaje en el perfil epícicloidial alargado.

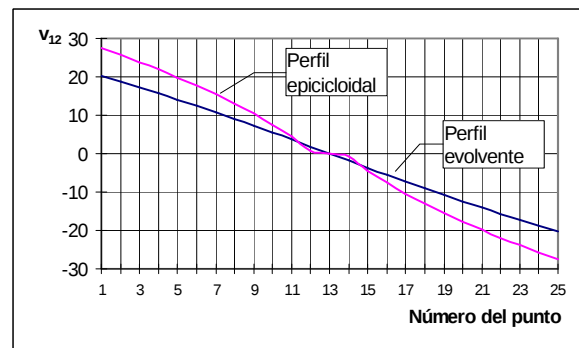


Fig.10. Velocidad de deslizamiento relativo ( $v_{12}$ ) vs punto de la línea de engranaje.

## 5. Conclusiones

El estudio realizado permite afirmar que las curvas evolventes de círculo pertenecen a la familia de las curvas epícicloides, pues se obtienen a partir de éstas cuando el radio generatriz alcanza valor infinito. A tal efecto se desarrolló una demostración matemática, que no aparece en la bibliografía consultada.

Las comparaciones realizadas entre las diferentes curvas, atendiendo a su forma geométrica, no permiten tomar una decisión en cuanto a qué curva será mejor para el perfil de trabajo en engranajes que operan con distancia entre centros variable. Por un lado, unas permiten utilizar un mayor radio exterior y por otro lado, otras permiten prolongar la zona de trabajo de los dientes por dentro del radio básico.

Los perfiles de los dientes formados por la curva evolvente "común" pueden ser empleados en engranajes que requieran una variación de la distancia entre centros igual o inferior al 5% de la distancia mínima aproximadamente, para relación de transmisión igual a 1 o ligeramente superior. En este rango es aconsejable su uso debido a las ventajas que presenta este perfil.

Los perfiles formados por la curva epícicloidial "alargada" permiten hasta un 10% de variación de la

distancia entre centros, sin provocar la pérdida del contacto entre las ruedas ( $\epsilon > 1$ ) y sin introducir grandes irregularidades en el funcionamiento de la transmisión. No obstante, su empleo se realizará cuando el perfil evolvente común no permita alcanzar la variación de la distancia entre centros necesaria y preferiblemente en transmisiones que trabajen a bajas revoluciones para disminuir los efectos dinámicos.

## 6. Bibliografía

1. Baránov G. G. Curso de la teoría de mecanismos y máquinas. Editorial MIR. Moscú. 1988.
2. Broesma I. Design of gears. Editorial Industrial Press. Inc. New York. 1975.
3. Buckingham E. Manual of gear design. Section two. Editorial Industrial Press Inc. New York. 1971
4. Frolov K. B., Popov C. Teoría de Mecanismos y Máquinas. Editorial de la Escuela Superior de Moscú. (En Ruso). 1987.
5. Henriot. G. Manual práctico de engranajes. / G. Henriot. 1. ed. (Barcelona. Marcombo) S. A. Ediciones Técnicas. 1967; 161 p.
6. Kent W. Mechanical engineers' handbook. Edición Revolucionaria. La Habana. 1966.
7. Lehmann C. Geometría Analítica. Instituto Cubano del libro. La Habana. 1974.
8. Loyarte Cc. F. Cinemática de los engranajes. Ediciones G. Gilí S. A. Buenos Aires. Argentina. 1980.
9. Rektorys, K. Přehled užití Matematiky. SNTL. Praha. 1968.
10. Rey J. Geometría Analítica. Editorial Revolucionaria. La Habana. 1966.
11. Thomas G. Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica. Editora Revolucionaria. La Habana. 1968.
12. Woods F. Geometría Analítica y Cálculo Infinitesimal. Editora Hispano Americana. México. 1963.

---

## Study of the epicycloid and involute curves to form the profile of gears with variable center distance.

### Abstract:

In this work is carried out a study of the epicycloid and circle involutes curves in their general forms, with the objective of forming the working profile of the gear teeth that operate with variable center distance. From the general expressions of these curves and the formulas are developed formulae to determine some of their properties, as the curvature radius, the involute, etc. It is also carried out the demonstration that the circle involute is a peculiar case of the epicycloid, demonstration that does not appear in the specialized literature. Moreover, a comparison is made keeping in mind the kinematics properties of gears formed by the different curves. As conclusions of the work is stated that the common circle involute has the best properties for gears working with a variation of the center distance minor that 5%, while the extended epicycloid guarantees a better operation for gears working with a variation between the 5 and 10%.

**Key Words:** epicycloid, involute, teeth working profile, gears teeth, gear geometry.