Estudio de la rigidez de los dientes de las coronas de molinos azucareros

J. José Cabello Eras *, J. Moya Rodríguez, R. Goytisolo Espinosa ***
* Universidad de Cienfuegos. Carretra a Rodas, km 2, Cienfuegos
** Universidad Central de Las Villas
Teléfono: 22962 E-mail: jcabello@ucf.edu.cu

(Recibido el 5 de enero de 1999; aceptado el 19 de febrero de 1999)

Resumen

En el trabajo se obtienen las ecuaciones que expresan el espesor del diente de las coronas de molinos azucareros a lo largo de su eje, y aplicando la ecuación diferencial de la línea elástica de una viga se obtienen las ecuaciones necesarias para determinar la rigidez de los dientes en los perfiles de las coronas azucareras utilizadas en el país.

Palabras claves: Coronas dentadas, engranajes, rigidez, y molinos de caña.

1. Introducción

Las coronas de molino son piezas fundamentales en el trabajo de las plantas moledoras de los ingenios azucareros, estos engranajes de gran tamaño trabajan en condiciones muy duras, caracterizadas por fluctuaciones de la distancia entre centros, transmisión de grandes cargas con lubricación deficitaria y sometidos a la acción de diversos contaminantes como el guarapo, el agua y el bagazo, todo lo cual origina un desgaste acelerado de los dientes limitándose notablemente la vida útil.

Como quiera que la lubricación es uno de los principales medios con que se cuenta para disminuir el desgaste en las piezas de máquinas, es de gran importancia su estudio en las coronas de molino, ya que su comprensión cabal sentará las bases para mejorarla.

Para el estudio de la lubricación de engranajes es imprescindible conocer como se distribuye la carga entre los pares de dientes en contacto durante el proceso de transmisión, ya que de esto depende en gran medida el espesor de la película de lubricante que se forma entre las superficies conjugadas de los dientes.

En la figura 1 se puede apreciar la distribución de carga entre los dientes en una transmisión de engranajes de evolvente [3,6].

Como se puede apreciar, cuando hay dos pares de dientes en contacto la carga transmitida no se distribuye uniformemente entre estos, sino que se comparte de acuerdo a la rigidez de los mismos.

Se entiende por rigidez de un par de dientes la fuerza en Newtons que origina el desplazamiento del punto de contacto 1 mm en la dirección de la línea de engrane. El valor de las deformaciones depende de la posición del punto sobre el perfil de los dientes, de la forma del diente y del material de la rueda [2,3].

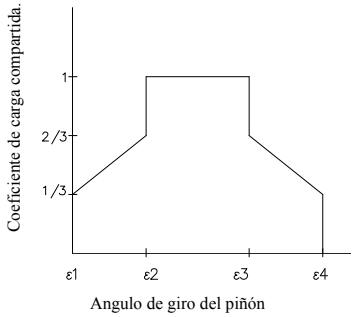

Fig 1. Distribución de carga entre los pares de dientes en contacto en engranajes de evolvente.

Si la rigidez de un par de dientes en un momento dado del contacto es C1 y la del segundo par que engrana simultáneamente es C2, entonces la fuerza que transmite cada diente se puede determinar por la condición de igualdad de los desplazamientos [2,5].

$$\frac{F1}{C1} = \frac{F2}{C2}$$

© 1999 – Ediciones ISPJAE.

Fp=F1+F2

Fp – Fuerza periférica total transmitida.

Teniendo en cuenta la forma particular del perfil de los dientes de corona de molino, para el estudio de su lubricación es imprescindible conocer la rigidez de este, y establecer como se comparte la carga entre los pares de dientes engranados en el período en que hay más de un par en contacto.

En el presente trabajo se realiza un estudio de la rigidez de los dientes de coronas de molino, sentándose las bases para, una vez estudiado detalladamente el proceso de transmisión de la carga, poder determinar la rigidez de los pares de dientes en contacto y establecer como ocurre la repartición de carga para estos engranajes en particular.

2. Desarrollo

Para determinar estudiar la rigidez de los dientes de las coronas de molino primeramente es necesario establecer la ecuación de la línea elástica de los dientes para cualquier punto de aplicación de la carga sobre el mismo.

La flecha en el punto de aplicación de la carga se puede expresar a través de la ecuación diferencial aproximada de la línea elástica de una viga [1,5,7,10].

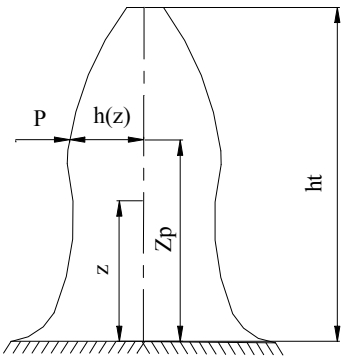

Fig 2. Esquema de análisis para la determinación de la línea elástica de un diente de corona.

$$y'' = \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{Mf(z)}{E \cdot Ix(z)} \qquad (1)$$

Mf(z) – Momento flector de la fuerza P a cualquier altura z sobre la base. Siendo la altura menor que la del punto de aplicación de la carga Zp.

$$Mf(z) = P \cdot (Zp - z) \qquad (2)$$

E – Módulo de elasticidad del material del diente.

Ix(z) –Momento de inercia de la sección del diente a la altura z sobre la base y respecto al eje perpendicular al plano.

Donde:

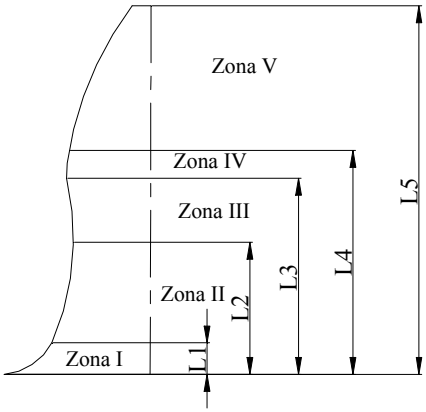

Fig 3. División del diente en zonas para determinar la función h(z)

$$Ix(z) = \frac{1}{12} \cdot b \cdot (2 \cdot h(z))^3 = \frac{2}{3} \cdot b \cdot h(z)^3 \qquad (3)$$

Sustituyendo 2 y 3 en 1 se obtiene:

$$y'' = \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{3 \cdot P \cdot (Zp - z)}{2 \cdot b \cdot E \cdot h(z)^3} \qquad (4)$$

Siendo necesario ahora determinar la función h(z) que exprese el perfil del diente respecto a su eje de simetría en toda su altura, para esto dividimos el diente en 5 zonas de acuerdo a los radios de trazado.

$$\alpha 1 = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{Rc^2 + Rp^2 - R1^2}{2 \cdot Rc \cdot Rp}\right)$$

$$\alpha 2 = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{2 \cdot Rp^2 - Se^2}{2 \cdot Rp^2}\right)$$

$$\beta 1 = \mathrm{Sen}^{-1}\left(\frac{Rc \cdot \mathrm{Sen}(\alpha 1)}{R1}\right)$$

$$\beta 2 = \mathrm{Sen}^{-1}\left(\frac{Rp \cdot \mathrm{Sen}(\alpha 2)}{Se}\right)$$

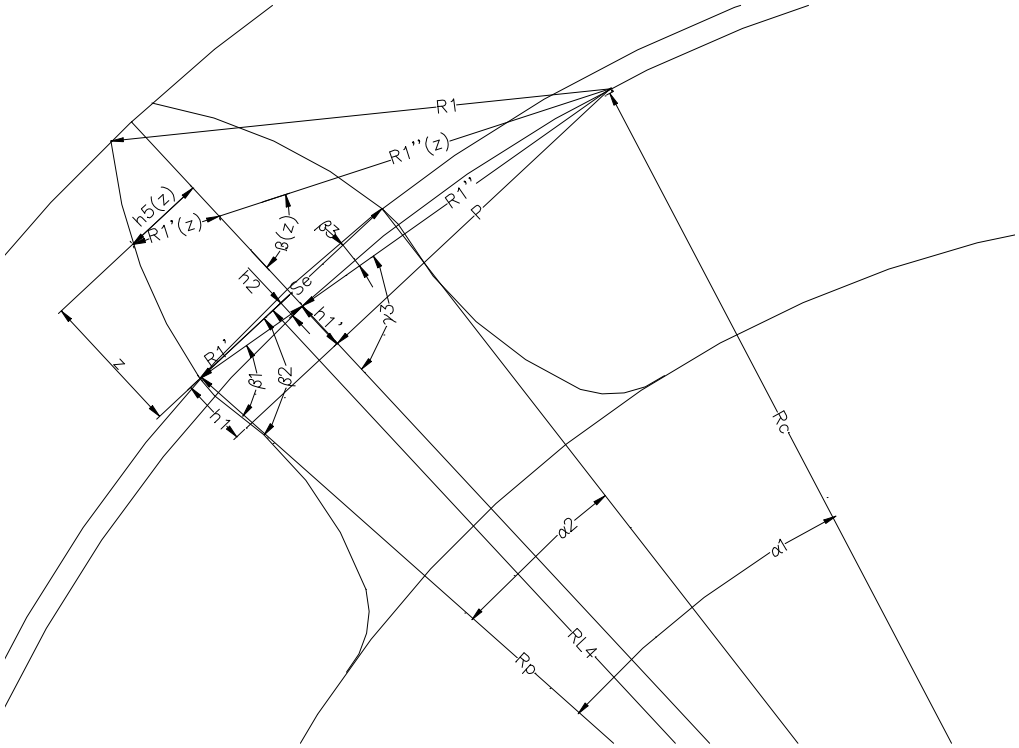

Fig 4. Determinación de la función h5(z) para la zona V.

$\beta 3 = \beta 2 - \beta 1$

$\gamma 3 = 90 - \beta 3$

$$RL4 = \sqrt{Rp^2 - \left(\frac{Se}{2}\right)^2}$$

$$R1' = \frac{Se}{2 \cdot Cos(\beta 3)}$$

$R1'' = R1 - R1'$

$P = R1'' \cdot Sen(\gamma 3)$

$$h1' = \frac{P}{\tan(\gamma 3)}$$

$$h2 = \frac{Se}{2} \cdot \tan(\beta 3)$$

$$h1 = \frac{R1}{R1''} \cdot h1'$$

$$\beta(z) = Cos^{-1}\left(\frac{h1+z}{R1}\right)$$

$$R1''(z) = \frac{P}{Sen(\beta(z))}$$

$R1'(z) = R1 - R1''(z)$

$h_5(z) = R1'(z) \cdot Sen(\beta(z))$

$$h_5(z) = \left[R1 - \frac{P}{Sen(\beta(z))}\right] \cdot Sen(\beta(z))$$

$h_5(z) = R1 \cdot Sen(\beta(z)) - P$

$$h_5(z) = R1 \cdot Sen\left[Cos^{-1}\left(\frac{h1+z}{R1}\right)\right] - P \qquad (6)$$

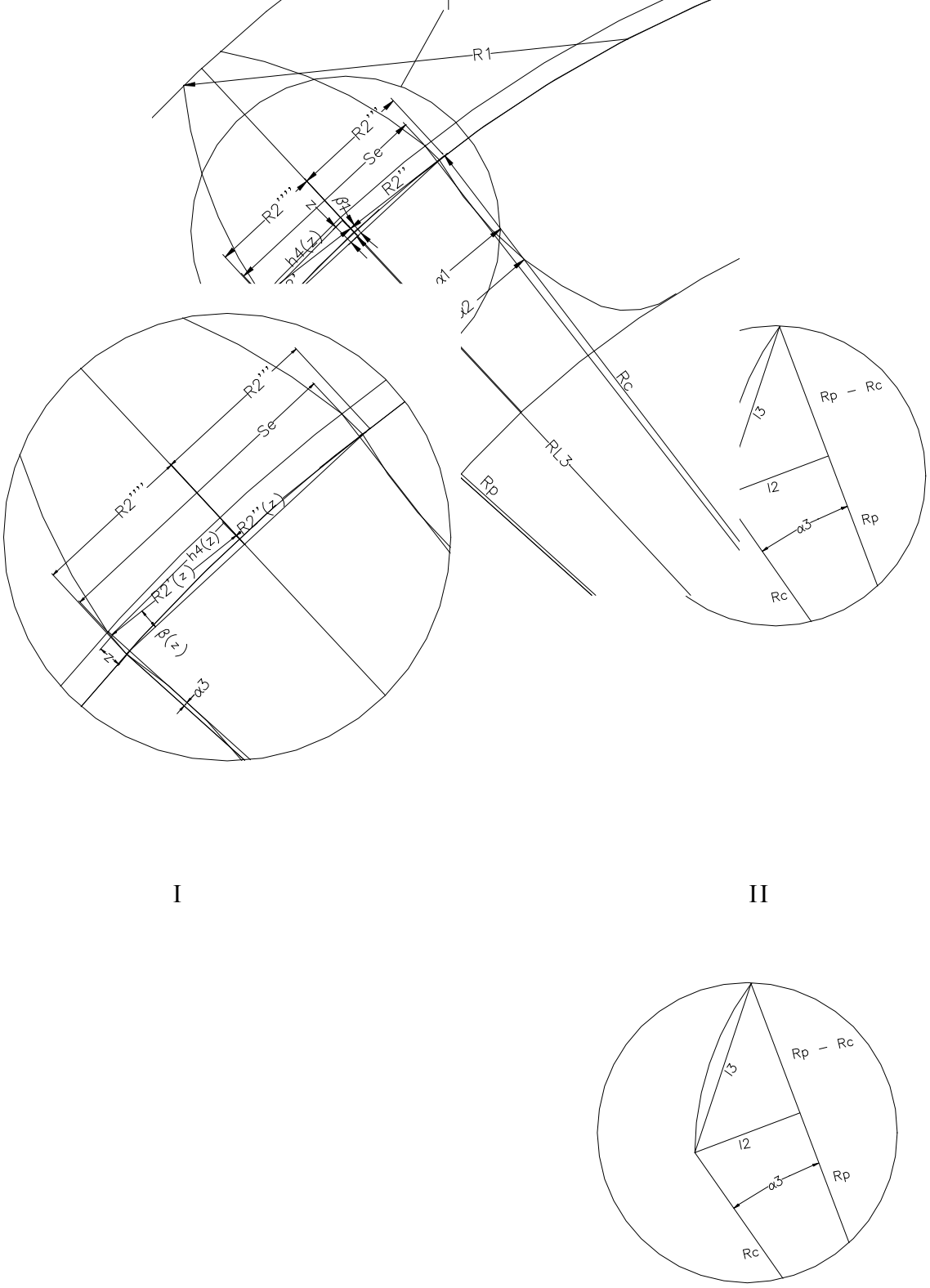

Fig 5. Determinación de la función h4(z) para la zona IV

$$\alpha 1 = \text{Cos}^{-1}\left(\frac{Rc^2 + Rp^2 - R2^2}{2 \cdot Rc \cdot Rp}\right)$$

$$\alpha 2 = \text{Cos}^{-1}\left(\frac{2 \cdot Rc^2 - R2^2}{2 \cdot Rc^2}\right)$$

$$\alpha 3 = \alpha 2 - \alpha 1$$

$$l2 = \sqrt{2 \cdot Rc^2 - 2 \cdot Rc^2 \cdot \text{Cos}(\alpha 3)}$$

$$l3 = \sqrt{(Rp - Rc)^2 + l2^2}$$

$$\beta 1 = \text{Cos}^{-1}\left(\frac{2 \cdot R2^2 - l3^2}{2 \cdot R2}\right)$$

$$R2' = \frac{Se}{2 \cdot \text{Cos}(\beta 1)}$$

$$R2'' = R2 - R2'$$

$$R2''' = R2'' \cdot \text{Cos}(\beta 1)$$

$$R2'''' = R2 - R2'''$$

$$RL3 = \sqrt{Rc^2 - (R2''')^2}$$

$$\beta(z) = \tan^{-1}\left(\frac{z}{R2}\right)$$

$$R2''(z) = R2''' \cdot \text{Cos}(\beta(z))$$

$$R2'(z) = R2 - R2''(z)$$

$$h_4(z) = R2'(z) \cdot \text{Cos}(\beta(z))$$

$$h_4(z) = R2 \cdot \text{Cos}\left[\tan^{-1}\left(\frac{z}{R2}\right)\right] - R2''' \cdot \text{Cos}^2\left[\tan^{-1}\left(\frac{z}{R2}\right)\right] \qquad (7)$$

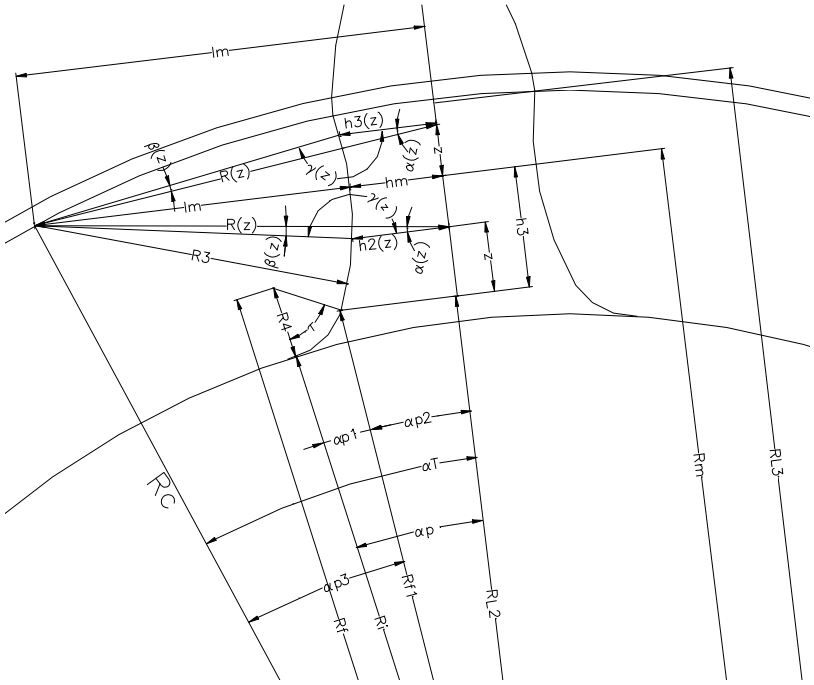

Fig 6. Determinación de la función h3(z) y h2(z) para las zonas III y II.

$$Rf = Ri + R4$$

$$Rf1 = \sqrt{Rf^2 + R4^2 - 2 \cdot Rf \cdot R4 \cdot \text{Cos}(\tau)}$$

$$\alpha p = \frac{360}{2 \cdot 17}$$

$$\alpha p1 = \text{Sen}^{-1}\left(\frac{R4}{Rf1} \cdot \text{Sen}(\tau)\right)$$

$$\alpha p2 = \alpha p - \alpha p1$$

$RL3 = Rf1 \cdot Cos(\alpha p2)$

$$\alpha p3 = Cos^{-1}\left(\frac{Rc^2 + Rf1^2 - R3^2}{2 \cdot Rc \cdot Rf1}\right)$$

$\alpha t = \alpha p2 + \alpha p3$

$lm = Rc \cdot Sen(\alpha t)$

$hm = lm - R3$

$Rm = Rc \cdot Cos(\alpha t)$

Zona III

$$R(z) = \sqrt{lm^2 + z^2}$$

$$\alpha(z) = \tan^{-1}\left(\frac{z}{lm}\right)$$

$$\gamma(z) = 180 - Sen^{-1}\left(\frac{R(z)}{R3} \cdot Sen(\alpha(z))\right)$$

$\beta(z) = 180 - \alpha(z) - \gamma(z)$

$$h_3(z) = R3 \cdot \frac{Sen(\beta(z))}{Sen(\alpha(z))}$$

$$h_3(z) = R3 \cdot \frac{Sen\left\{Sen^{-1}\left[\frac{\sqrt{lm^2 + z^2}}{R3} \cdot Sen\left(\tan^{-1}\left(\frac{z}{lm}\right)\right)\right] - \tan^{-1}\left(\frac{z}{lm}\right)\right\}}{Sen\left(\tan^{-1}\left(\frac{z}{lm}\right)\right)} \quad (8)$$

Zona II

$RL2 = Rf1 \cdot Cos(\alpha p2)$

$h3 = Rm - Rl2$

$$R(z) = \sqrt{lm^2 + (h3 - z)^2}$$

$$\alpha(z) = \tan^{-1}\left(\frac{h3 - z}{lm}\right)$$

$$\gamma(z) = 180 - Sen^{-1}\left(\frac{R(z)}{R3} \cdot Sen(\alpha(z))\right)$$

$\beta(z) = 180 - \alpha(z) - \gamma(z)$

$$h_2(z) = R3 \cdot \frac{Sen(\beta(z))}{Sen(\alpha(z))}$$

$$h_2(z) = R3'. \frac{Sen\left\{Sen^{-1}\left[\frac{\sqrt{lm^2 + (h3-z)^2}}{R3} \cdot Sen\left(\tan^{-1}\left(\frac{(h3-z)}{lm}\right)\right)\right] - \tan^{-1}\left(\frac{(h3-z)}{lm}\right)\right\}}{Sen\left(\tan^{-1}\left(\frac{(h3-z)}{lm}\right)\right)} \quad (9)$$

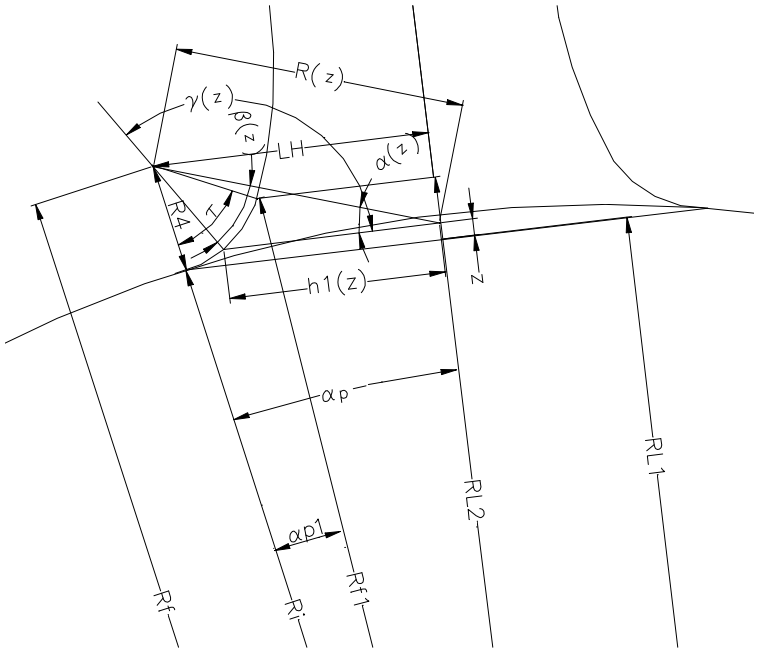

Fig 7. Determinación de la función h1(z) para la zona I

$$\alpha b = \frac{360}{2 \cdot 17}$$

$$Rf = Ri + R4$$

$$RL1 = Ri \cdot \cos(\alpha p)$$

$$Rf1 = \sqrt{Rf^2 + R4^2 - 2 \cdot \cos(\tau)}$$

$$R(z) = \sqrt{Rf^2 + (RL1 + z)^2 - 2 \cdot Rf \cdot (RL1 + z) \cdot \cos(\alpha p)}$$

$$Lh = Rf \cdot \mathrm{Sen}(\alpha p)$$

$$\alpha(z) = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{Lh}{R(z)}\right)$$

$$\gamma(z) = 180 - \mathrm{Sen}^{-1}\left(\frac{R(z)}{R4} \cdot \mathrm{Sen}(\alpha(z))\right)$$

$$\beta(z) = 180 - \gamma(z) - \alpha(z)$$

$$h_1(z) = R4 \cdot \frac{\mathrm{Sen}(\beta(z))}{\mathrm{Sen}(\alpha(z))}$$

$$h_1(z) = R4 \cdot \frac{\mathrm{Sen}\left\{\mathrm{Sen}^{-1}\left[\frac{R(z)}{R4} \cdot \mathrm{Sen}\left(\mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{Lh}{R(z)}\right)\right)\right] - \mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{Lh}{R(z)}\right)\right\}}{\mathrm{Sen}\left[\mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{Lh}{R(z)}\right)\right]} \quad (10)$$

Considerando en la ecuación diferencial de la línea elástica del diente (4) los términos que no dependen de la altura del punto de aplicación de la carga como unitarios, esta se resuelve por métodos numéricos con el software Mathematica 3.0 para cualquier valor de la altura del punto de aplicación de la carga Zp, siendo necesario por supuesto tener en cuenta las condiciones para la determinación de las constantes de integración en cada zona. Al valor de la solución de la ecuación diferencial para las diferentes alturas del punto de aplicación de la carga en que se evalúen se denominará Indice de Rigidez (IR).

En la tabla 1 se muestran los valores del IR según la altura del punto de aplicación de la carga para el perfil de corona A.

Tabla 1. Valores del Indice de Rigidez para el perfil de corona A.

Zp(mm)	21	35	56	89	105	145	185
IR	0.0125	0.111	0.4176	2.12	3.56	10.6	26.5

En la figura 8 se puede apreciar el comportamiento del Indice de Rigidez con respecto a la altura z del punto de aplicación de la carga para el perfil y el ajuste de esta dependencia a un polinomio de 4to grado.

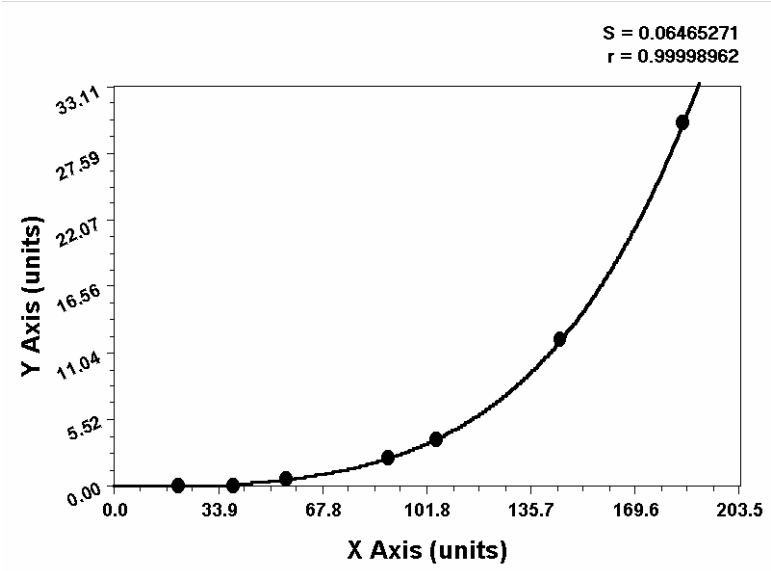

Fig 8. Comportamiento del Indice de Rigidez (eje Y) con la altura del punto de aplicación de la carga (eje X).

Tabla 2. Coeficientes de los polinomios de 4to grado ($Y = A + BX + CX^2 + DX^3+EX^4$) a que fue ajustada la dependencia IR vs z

Perfil	A	B	C	D	E
A	0.014366	-0.01304	0.0005028	-3.75319×10^{-6}	3.0261×10^{-8}
B	0.017920	-0.005558	0.0002669	-1.45658×10^{-6}	2.4369^{-8}
C	0.005294	-0.006644	0.0002911	-1.89029×10^{-6}	8.47162×10^{-8}
D	-0.0070755	0.01940	-0.0011458	1.721037×10^{-5}	-3.96811×10^{-8}
E	0.0419081	-0.038827	0.00169104	-1.85254×10^{-5}	8.47162×10^{-8}
F	0.0585896	-0.050926	0.00214635	-2.38167×10^{-5}	$1.053782x^{-7}$
G	0.0543716	-0.0497841	0.00216022	-2.457615×10^{-5}	1.1097×10^{-7}
H	0.0679293	-0.0676772	0.00305846	-3.66246×10^{-5}	1.59876×10^{-7}
I	0.0947019	-0.0684759	0.00306977	3.68851×10^{-5}	1.65335×10^{-7}
J	0.130986	-0.0932762	0.0041066	-4.96569×10^{-5}	2.152628×10^{-7}
K	0.0793230	-0.058644	0.0026766	-3.10453×10^{-5}	1.515541×10^{-7}
L	0.0991116	-0.071567	0.0031636	-3.66178×10^{-5}	1.772654×10^{-7}
M	0.10440	-0.072034	0.0030404	-3.43645×10^{-5}	1.70154×10^{-7}
N	0.17213	-0.113191	0.0044093	-4.66095×10^{-5}	2.25372×10^{-7}
N-N	0.057178	-0.06205	0.003210	-3.85341×10^{-5}	2.37679×10^{-7}
O	0.0148429	-0.013389	0.0007969	-1.35441×10^{-5}	1.44926×10^{-7}
P	0.099820	-0.0782188	0.00411719	-6.26805×10^{-5}	3.66492×10^{-7}

Conociendo los valores del Indice de Rigidez podemos determinar la rigidez unitaria (Cu) en la dirección perpendicular al eje del diente, que es la fuerza en Newtons necesaria para desplazar el punto de aplicación 1 mm en un diente de grosor 1mm, lógicamente el producto de Cu por el ancho del diente nos permitirá obtener la rigidez C del diente.

$$Cu = \frac{2 \cdot E}{3 \cdot IR(z)}$$

$C = Cu \cdot b$

3. Conclusiones

1 – El análisis realizado permite determinar las deformaciones reales del punto de aplicación de la carga para cualquier altura de este.

2 – La variación del Indice de Rigidez con la altura del punto de aplicación de la carga se puede ajustar a un polinomio de 4to grado.

3 – Las ecuaciones obtenidas del IR según la altura del punto de aplicación de la carga permiten determinar la rigidez de los dientes para todos los perfiles de coronas azucareras en uso en el país en la dirección perpendicular al eje del diente.

4. Recomendaciones

1 – Para establecer como se comparte la carga entre los pares de dientes en contacto es preciso determinar la componente de la fuerza transmitida en la dirección perpendicular al eje de los dientes.

2 – Aplicar este análisis a los nuevos perfiles diseñados y desarrollados en la Universidad Central de las Villas.

Bibliografía

1. Beer, Ferdinand; Johnston,E. Mecánica de Materiales. Bogota: Editorial McGraw-Hill Interamericana S.A.1993.—738p.
2. Dobrovolski, D. Elementos de Máquinas. La Habana: Ediciones ENPES. 1990.--582p.
3. Elkholy A. “Tooth load sharing in high contact ratio spur gears”. Transaction of the ASME. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design. Vol 107, Marzo 1985. pag 11-16.
4. Errichelo, R. Lubrication of gears. Lubrication Engineering. Vol, 46 No 1. Enero 1990.
5. Feodosiev, V.I. Resistencia de Materiales. Editorial MIR. 1980.—583p.
6. Flodin,A. Computer Simulated Wear in Spur Gears. Licentiate Thesis. Royal Institute of Technology. Suecia.1997.

7. Fritzgerald, Robert W. Mecánica de Materiales. México: Editorial Alfaomega. 1996.—557p.

8. Michaelis, K. Test methods for gear lubricants. Proceedings of Tribology 96 Conference of South African Institute of Tribology.Marzo 1996.

9. Moya Rodríguez, J. Diseño de Coronas de Molino de Caña de Azúcar. Tesis de Doctorado. UCLV. 1994.

10. Mott, Robert L. Resistencia de Materiales Aplicada. México: Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana S.A. 1996.—640p.

11. Wilson, Charles E. Computer Integrated Mashine Design. New Jersey:Editorial Prentice-Hall. 1997.—646p.

Study of teeth stiffness of sugar mills

Abstract

A study of the stiffness of a sugar mills pinion teeth with use of a beam elastic line equation is reported in this paper. The results of the works are the equations to calculate the stiffness of teeth

Key words: Sugar mills, gears, and stiffness.

III Encuentro de Ingeniería de Materiales

II Congreso Cubano de Ingeniería Mecánica

Septiembre 12 – 15, 2000, La Habana, Cuba

TEMAS PRINCIPALES

Metalografía y Tratamiento Térmico, Tribología, Materiales Compuestos, Biomateriales, Materiales para la Electrónica, Cerámicas y Polímeros, Mecánica de la Fractura, Metalurgia, Maquinado, Metrología, Soldadura, Economía en la Fabricación, Conformación, Maquinas de Control Numérico

Para enviar resúmenes o solicitar información adicional

Comité Organizador CCIM'2000
Instituto Superior Politécnico *José Antonio Echeverría*
Facultad de Ingeniería Mecánica
Calle 127 s/n, CUJAE, Marianao 15, Ciudad de La Habana, Cuba
Teléfono: (537) 20 2267 Fax: (537) 27 1208
E-mail: ccim@mecanica.ispjae.edu.cu