

Momento de inercia a la torsión de barras de perfil canal

R. Rivero Galán y J. García de la Figal

Facultad de Ingeniería Mecánica, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría. (ISPJAE)

(Recibido el 5 de octubre de 1997; aceptado el 19 de noviembre de 1997)

Resumen

En el presente trabajo se brindan fórmulas y coeficientes para la determinación del momento de inercia a la torsión de una barra de perfil canal. Las fórmulas obtenidas se validan mediante la simulación de diferentes estructuras de uniones entre canales con el uso del método de los elementos finitos.

1. Introducción

En el cálculo de los perfiles de paredes delgadas abiertos es muy común entre ingenieros e investigadores considerar los extremos de la barra a analizar bajo una de las dos siguientes condiciones de constreñimiento: Un extremo libre y otro empotrado, ambos extremos empotrados.

Se consideran además los empotramientos perfectos, es decir, que no dejan ninguna posibilidad de movimiento a la barra. Estas son las condiciones que se establecen en la literatura más asequible y común sobre el tema.

Sin embargo, la unión de una barra con otras barras no tiene que ser un empotramiento perfecto, dejando en la mayoría de los casos cierta movilidad. El empotramiento se comporta por tanto como imperfecto. Así, con la unión de los travesaños y largueros, de diversas estructuras el alma del larguero se deflecta bajo la acción de la carga que le

transmite el travesaño torsionado, comportándose la unión entre ambos como un empotramiento imperfecto.

T.H.G. Megson⁴ ha estudiado el fenómeno empleando la técnica de los elementos finitos para travesaños y largueros con forma de perfiles canal y en I, cuando el travesaño está soldado en el centro del alma del larguero Figura 1.

Pero en la construcción de bastidores de vehículos, por ejemplo, lo común es que el travesaño vaya desplazado del centro del alma del larguero, cuyo análisis no está recogido en la bibliografía consultada.

En este trabajo se brinda un estudio de la rigidez de las uniones soldadas de vigas canales, cuando el travesaño esta desplazado del centro del alma del larguero. Se brindan las ecuaciones para el cálculo de estas uniones, así como las necesarias para el cálculo del bimomento y ángulo de torsión, teniendo en cuenta que la rigidez de la unión está afectada por los factores señalados.

2. Elasticidad del travesaño centrado en el larguero

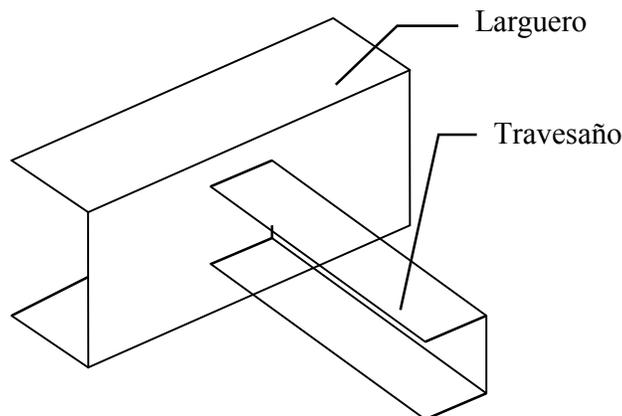


Fig. 1 Travesaño ubicado en el centro del alma del larguero

En la figura 1. Se muestra un esquema de un travesaño soldado en el centro del alma del larguero, que se corresponde con el caso estudiado por Megson. A continuación se deducen las ecuaciones que miden la rigidez de la unión, en el caso de uniones entre canales. Para ello, se recurre a la teoría de las tiras elásticas del alma del larguero³ que establece tiras de ancho unitario que se comportan como vigas simplemente apoyadas en las alas del larguero. Figura.2.

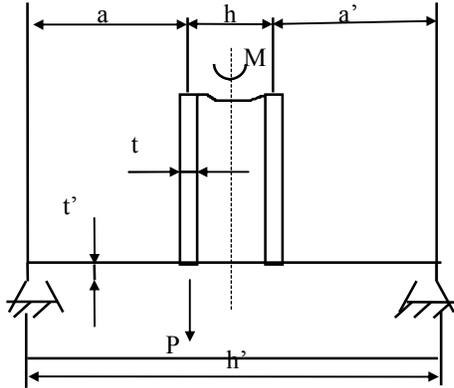


Fig. 2 Esquema de las tiras de ancho unitario, del alma del larguero.

La tendencia al alabeo del travesaño torsionado produce fuerzas P que deflecan el alma del larguero. Para tener en cuenta este efecto se introduce el siguiente coeficiente.

$$C = \frac{E \cdot t^2}{k \cdot h}$$

Donde:

E : Módulo de elasticidad del material, k : rigidez a flexión de la tira unitaria del alma del larguero, t : espesor del perfil del travesaño, h : altura del travesaño

De la aplicación del método de Vereshiaguin a una tira del alma del larguero de ancho unitario simplemente apoyada, se obtiene:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{3E \cdot I(h')^2} (h' \cdot a')^2 (a')^2 [(h' - a') + a']$$

De modo que:

$$C = 4 \left(\frac{R_h}{R_t} \right)^3 \frac{h^2}{t} \left[\left(\frac{1}{R_n} + R_a \right)^2 \left(1 - \frac{1}{R_h} - R_a \right)^2 \right]$$

$$\text{Donde: } R_h = \frac{h'}{h}, \quad R_t = \frac{t'}{t}, \quad R_a = \frac{a}{h'}$$

$$I = \frac{t'^3}{12} : \text{Momento de inercia de la tira de ancho unitario}$$

del alma del larguero.

Para llevar este coeficiente, C , a un número adimensional, se multiplica por la rigidez flexora torsional del travesaño α definido por^{1,2}

$$\alpha = \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_w}} \quad \text{y} \quad I_t = \frac{1}{3} \cdot t^3 \cdot S$$

Siendo I_t el momento de inercia a torsión de perfiles delgados abiertos, con deplanación libre sus extremos, S : longitud de la línea media del travesaño, G : módulo de distorsión. y I_w : el momento sectorial de inercia del travesaño.

Entonces el valor de αC para el acero es:

$$\alpha C = 27.70 \left(\frac{R_n}{R_t} \right)^3 \left[\left(\frac{1}{R_n} + R_a \right)^2 \left(1 - \frac{1}{R_n} - R_a \right)^2 \right] \quad (1)$$

De este modo se brinda un nuevo coeficiente adimensional que cuantifica la elasticidad de la unión. El coeficiente αC aquí presentado y definido por la expresión (1), permitirá considerar la elasticidad del alma del larguero en donde se encuentra fijado el travesaño, tanto estando éste en el centro del alma del larguero, como desplazado hacia uno u otro lado de la altura de éste. Así, para el caso en que el travesaño se encuentre en el centro del alma del larguero Figura 2., condición para la cual:

$$R_a = 0.5 - \frac{R_h - 1}{2R_h}$$

la expresión (1) toma la forma:

$$\alpha C = \frac{1.73}{R_h \cdot R_t^3} (R_n^2 - 1)^2, \quad (2)$$

que fueron los casos de uniones estudiadas por Megson, aunque por otros métodos y vías.

Para el caso en que el travesaño este desplazado del centro del alma del larguero, la magnitud R_a mide este desplazamiento a través de la magnitud " a " Figura 2. Así, cuando un ala del travesaño coincide con un ala del larguero, en que $a = 0$, el coeficiente $R_a = 0$. Y la expresión (1) toma la forma:

$$\alpha C = \frac{27.7}{R_h \cdot R_t^3} (R_h - 1)^2, \quad (3)$$

3. Ecuaciones para barra empotrada en un solo extremo

Resolviendo la ecuación diferencial que describe el comportamiento a la torsión de una barra empotrada en un extremo y el otro libre¹ con las condiciones

$$B_0 = -\frac{hk\theta_0}{t^2}I_w \text{ y } B_l = 0, \text{ siendo } B_z \text{ el}$$

bimomento en cualquier sección de la barra, se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{M_t}{G \cdot I_t} \left[Z + \frac{sh\alpha(l-Z) - sh\alpha l}{\alpha(ch\alpha l + (\alpha c) * sh\alpha l)} \right] \\ \theta &= \frac{M_t}{G \cdot I_t} \left[1 - \frac{ch\alpha(l-Z)}{ch\alpha l + (\alpha c) * sh\alpha l} \right] \\ B &= -\frac{M_t}{\alpha} \left[\frac{sh(l-Z)\alpha}{ch\alpha l + (\alpha c) * sh\alpha l} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Donde:

M_t : Momento torsor aplicado al extremo libre de la barra.

l : Longitud de la barra.

4. Ecuaciones para barra empotrada en ambos extremos

A continuación se brindan las ecuaciones para el cálculo de φ , θ y β , cuando el travesaño está empotrado en sus dos extremos. Hay que señalar que los coeficientes αc y $(\alpha c)^*$ no dependen de la cantidad de empotramientos del travesaño, por lo que podrán siempre calcularse por las expresiones (1), (2) y (3).

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{M_t}{GI_t} \left[Z + \frac{sh\alpha(l-z) - sh\alpha l - sh\alpha z}{\alpha(ch\alpha l + (\alpha c) * sh\alpha l + 1)} \right] \\ \theta &= \frac{M_t}{GI_t} \left[1 - \frac{ch\alpha(l-z) + ch\alpha z}{1 + ch\alpha l + (\alpha c) * sh\alpha l} \right] \\ B &= \frac{M_t}{\alpha} \left[\frac{sh\alpha z - sh\alpha(l-z)}{1 + ch\alpha l + (\alpha c) * sh\alpha l} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

5. Momento de inercia a la torsión

En los programas de computación que resuelven estructuras hiperestáticas independiente del método en que se fundamenten: Método de los desplazamientos, método de la fuerza, método de los elementos finitos; uno de los parámetros que el programa solicita al usuario, es el momento de inercia a torsión de las barras de la estructura. En el caso de perfiles delgados abiertos, entre nuestros ingenieros, es usual dar este parámetro como:

$$I_t = \frac{1}{3}t^3S$$

Sin embargo, esa inercia a torsión solo es cierta si la barra no está restringida en sus extremos, al estar torsionada. Esta condición, sin embargo, es casi imposible pues la barra tiene que tener algún tipo de apoyo.

En efecto, comparando las fórmulas del ángulo φ , cuando la barra tiene libre alabeo (no constreñida en sus extremos),

$$\varphi = \frac{M_t l}{GI_t} \quad (6)$$

con la de ese ángulo en una barra parcialmente restringida en un extremo ecuación (4) y evaluándola para $Z = l$, se tiene:

$$\varphi = \frac{M_t}{GI_t} \left[l - \frac{sh\alpha l}{\alpha(ch\alpha l + (\alpha c) * sh\alpha l)} \right]$$

De esta comparación se deduce que, el momento de inercia a la torsión I_t' , teniendo en cuenta los factores señalados es,

$$I_t' = \frac{I_t}{1 - \frac{sh\alpha l}{\alpha l(ch\alpha l + (\alpha c) * sh\alpha l)}} \quad (7)$$

La fórmula (7) es válida para cualquier barra empotrada en un solo extremo. Para empotramiento en ambos extremos, al usarse la primera de las ecuaciones (5), se obtiene,

$$I_t' = \frac{I_t}{1 - \frac{2sh\alpha l}{\alpha l(ch\alpha l + (\alpha c) * sh\alpha l + 1)}} \quad (8)$$

Para validar las expresiones obtenidas se construyeron los modelos fisico-matemáticos de las estructuras formadas por la unión entre canales con el travesano desplazado, cuyas dimensiones se muestran en la tabla 1

Tabla 1. Dimensiones de largueros y travesaños, cuando el travesano esta empotrado desplazado del centro del alma del larguero. Valores de los coeficientes K^* para el uso de las fórmulas de Megson

Modelo	Larguero			Travesano			Variables		Coeficientes				Carga
	h' mm	b' mm	t' mm	h mm	b mm	t mm	R_h	R_t	K^*	αc^*	αc	ψ	$M_r=80$ Kg/cm
CODEL22'	500	300	0.8	400	200	2	1.25	0.40	0.289	5.491	21.64	0.253	CM3-80
CODEL15'	500	300	1.2	400	200	2	1.25	0.60	0.134	2.087	6.41	0.325	CM3-80
CODEL23'	500	300	2	400	200	2	1.25	1.00	0.025	0.182	1.38	0.132	CM3-80
CODEL18'	500	300	3	400	200	2	1.25	1.66	0.015	0.149	0.410	0.363	CM3-80
CODEL10'	500	300	4	400	200	2	1.25	2.00	0.011	0.123	0.173	0.711	CM3-80
CODEL12'	160	80	8	120	60	20	1.33	0.40	0.855	5.932	35.40	0.164	CM4-80
CODEL24'	160	80	12	120	60	20	1.33	0.60	0.687	2.199	10.50	0.205	CM4-80
CODEL19'	160	80	2	120	60	20	1.33	1.00	0.422	0.254	2.26	0.112	CM4-80
CMODEL4'	160	80	8	120	60	6	1.33	1.33	0.204	0.229	0.96	0.239	CM4-80
CODEL17'	160	80	10	120	60	6	1.33	1.66	0.140	0.191	0.49	0.383	CM4-80
CMODEL1'	400	100	8	300	100	4	1.33	2.00	0.064	0.183	0.28	0.637	CM1-80
CMODEL6'	50	30	1.6	25	25	4	2.0	0.40	0.879	7.366	216.4	0.034	CM6-80
CODEL20'	50	30	1.8	25	25	3	2.0	0.60	0.702	2.411	64.12	0.037	CM5-80
CODEL3'	50	30	2	25	25	2	2.0	1.00	0.099	0.321	13.85	0.023	CM5-80
CODEL13'	50	30	5	25	25	3	2.0	1.66	0.169	0.208	3.03	0.069	CM5-80
CMODEL5'	50	30	3	25	25	1.5	2.0	2.00	0.146	0.212	1.73	0.122	CM5-80
CODEL14'	400	180	2.4	160	70	6	2.5	0.40	0.949	28.18	389.5	0.072	CM8-80
CODEL16'	400	180	3.6	160	70	6	2.5	0.60	0.788	5.571	115.4	0.048	CM8-80
CODEL21'	400	180	6	160	70	6	2.5	1.00	0.460	1.279	24.93	0.051	CM8-80
CMODEL8'	400	180	10	160	70	6	2.5	1.66	0.179	0.328	5.45	0.061	CM8-80
CMODEL2'	300	100	8	120	70	4	2.5	2.00	0.147	0.255	3.11	0.082	CM2-80

6. Obtención de los coeficientes k^* para travesaños desplazados

Los valores correspondientes al momento de inercia a la torsión, I_t' , se obtuvieron determinando el ángulo de giro de los nodos de cada modelo ubicados el extremo libre del travesano y haciendo uso de la fórmula (6), ya que cada modelo fue sometido a un momento torsor de magnitud 80 Kg-cm.

Mediante el uso de la fórmula dada por Megson, se determinaron los coeficientes K^* .

$$K^* = \frac{\alpha l}{th(\alpha l)} \left[\frac{I_t'}{I_t} - 1 \right] + 1 \quad (9)$$

De esta forma se brindan en coeficientes, K^* , para hacer uso de la fórmula dada por Megson, pero para el caso de que la barra travesano se encuentra desplazada del centro del alma del larguero.

7. Obtención de los coeficientes (αc)

Los coeficientes αc teóricos fueron determinados, haciendo uso de la fórmula

$$\alpha c = \frac{27.7}{R_h \cdot R_t^3} [R_h - 1]^2.$$

8. Obtención de los coeficientes αc^*

La relación que existe entre este coeficiente (αc)* y los ya calculados, K^* , es la siguiente:

$$\alpha c^* = \frac{K^*}{[1 - K^*]th(\alpha l)} \quad (10)$$

Como se observa en los resultados mostrados (tabla 1), hay diferencias entre los valores de los coeficientes αc

(teórico) y αc^* (experimental), es decir, entre los coeficientes αc determinados teóricamente como función de las variables R_h y R_t y los que se requieren para calcular I_t' por la fórmula:

$$I_t' = I_t \left[\frac{\alpha c (1 + (\alpha c)^* th \alpha c)}{\alpha c (1 + (\alpha c)^* th(\alpha c) - th(\alpha c))} \right] \quad (11)$$

Para resolver este problema y disponer de una fórmula sencilla para calcular αc^* se introduce el factor de corrección ψ , el cual se determina por la relación entre $(\alpha c)^*$ y αc , estos es:

$$\psi = \frac{(\alpha c)^*}{\alpha c} \quad (12)$$

los valores correspondientes al factor de corrección, ψ , se muestran en la tabla 2..

Tabla 2. Valores correspondientes al factor de corrección

Rh=1,25	
Rt	ψ
$0.4 \leq R_t \leq 0.6$	$-4.35R_t^3 + 5.22 R_t^2 - 1.554R_t + 0.3178$
$0.6 \leq R_t \leq 1.00$	$3.4343R_t^3 - 8.7917 R_t^2 + 6.853 R_t - 1.3636$
$1.00 \leq R_t \leq 1.66$	$-0.5048R_t^3 + 3.0258 R_t^2 - 4.964R_t + 2.5756$
$1.66 \leq R_t \leq 2.00$	$-0.5015R_t^3 + 3 R_t^2 - 4.937R_t + 2.5603$

9. Determinación de los coeficientes de corrección mediante interpolación por tramos

Debido que los coeficientes αc^* , y αc han sido obtenidos de forma determinística, se procedió a calcular los factores de corrección mediante el uso de interpolaciones cúbicas por tramos.

Para el caso de travesaños desplazados del centro del alma del larguero

$$\alpha c^* = \psi \alpha c$$

Con el uso de las interpolaciones que se brindan a continuación es posible encontrar un valor de coeficiente de corrección, en los rangos de las variables R_h y R_t , en que se ha realizado el estudio.

Rh=2.0	
Rt	ψ
$0.4 \leq R_t \leq 0.6$	$-0.29588R_t^3 + 0.3550 R_t^2 - 0.1151R_t + 0.4220$
$0.6 \leq R_t \leq 1.00$	$0.27927R_t^3 - 0.6802R_t^2 + 0.50597R_t - 0.082$
$1.00 \leq R_t \leq 1.66$	$0.04056R_t^3 + 0.279297 R_t^2 - 0.4535R_t + 0.2378$
$1.66 \leq R_t \leq 2.00$	$0.07575R_t^3 + 0.45453 R_t^2 - 0.7444R_t + 0.3987$

Rh=1.33	
Rt	ψ
$0.4 \leq R_t \leq 0.6$	$-2.8586R_t^3 + 3.4302 R_t^2 - 1.0528R_t + 0.2192$
$0.6 \leq R_t \leq 1.00$	$2.9829R_t^3 - 7.0845 R_t^2 + 5.2561R_t - 1.0425$
$1.00 \leq R_t \leq 1.33$	$-2.4460R_t^3 + 9.2025 R_t^2 - 11.0309R_t + 4.3864$
$1.33 \leq R_t \leq 1.66$	$1.4040R_t^3 - 6.1594 R_t^2 + 9.4004R_t - 4.671$
$1.66 \leq R_t \leq 2.00$	$-0.816474R_t^3 + 4.8988 R_t^2 - 8.9562R_t + 5.4859$

Rh=2.5	
Rt	ψ
$0.4 \leq R_t \leq 0.6$	$0.57857R_t^3 - 0.69422R_t^2 + 0.1345R_t + 0.09222$
$0.6 \leq R_t \leq 1.00$	$-0.36027R_t^3 + 0.9956R_t^2 - 0.8793R_t + 0.2950$
$1.00 \leq R_t \leq 1.66$	$0.09253R_t^3 - 0.3628 R_t^2 + 0.4790R_t - 0.1577$
$1.66 \leq R_t \leq 2.00$	$-0.09611R_t^3 + 0.59666 R_t^2 - 1.080 R_t + 0.7051$

En la figura 3. se muestra de forma aproximada la variación del coeficiente αc^* con las variables R_h y R_t en los rangos donde se hicieron los ensayos numéricos.

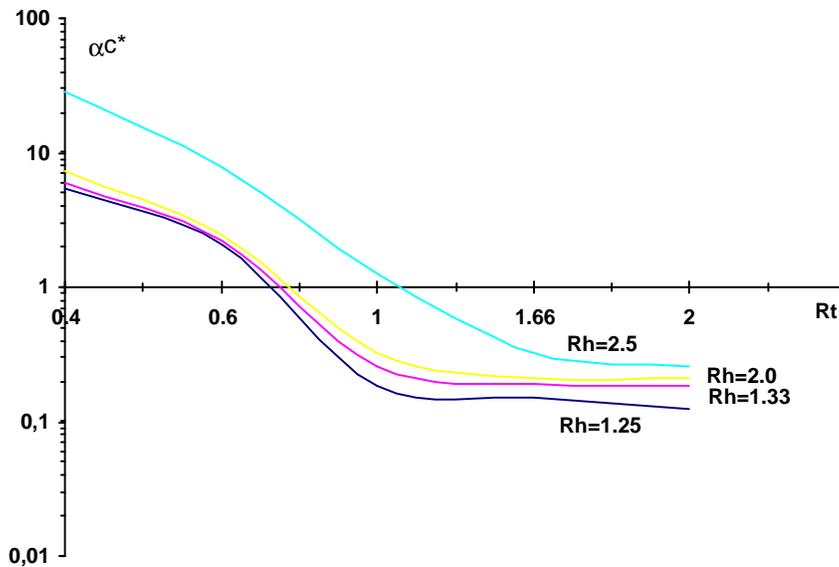


Fig. 3 Variación del coeficiente αC^* con las variables adimensionales R_h y R_t .

10. Conclusiones

Se han brindado fórmulas para la determinación del momento de inercia a la torsión para el caso en que la barra travesano se encuentra desplazada del centro del alma del larguero que sirve de empotramiento, teniendo en cuenta el efecto del bimomento que se produce en esa zona y la imperfección del empotramiento. Las fórmulas son adecuadas para obtener el valor de esa característica de forma más cercana a la realidad, obteniéndose por tanto un diseño de la estructura más adecuado.

Referencias

1. Feodosiev. V.I. Resistencia de Materiales, Ed. Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, 1983.
2. Franciszek Romanów, Resistencia de estructuras de vehículos. Autores, Wydawnictwa Komunikacje, Varsovia, 1990.
3. García de la Figal C. Javier, Estructuras Metálicas de las Máquinas, Dpto. Mecánica aplicada, Facultad de Ingeniería mecánica ISPJAE, Ciudad de la Habana, Cuba., 1992.
4. T.H.G. Megson, Structural Analysis of codders frames under torsion, Proc. Instr. March, Engers, Vol 190, 1989.

Torsional inertia Moment for a profile bar channel

Abstract

In the paper are offered formulations and coefficients for the determination of the moment of inertia to the twist for a profile bar channel. The obtained formulations are validated through the simulation by the finite elements method of different structures of unions between channels.