

Análisis dinámico no lineal para pilotes de cimentación fundidos "in situ"

E. Fraga Guerra, J. A. Alvarez Vasallo, L. Baldoquín de la Peña y Ma. L. Brito Vallina

Dpto. Matemática, Dpto. Mecánica Aplicada

Facultad de Ingeniería Mecánica

Instituto Superior Politécnico *José Antonio Echeverría*, La Habana 19390, Cuba.

(Recibido el 5 de diciembre de 1997; aceptado el 19 de diciembre de 1997)

Resumen

En la actualidad existen diversas técnicas para controlar el estado técnico de los pilotes de cimentación, una de las más utilizadas es mediante el estudio de sus vibraciones mecánicas, ya que este método resulta muy eficaz pues permite obtener óptimos resultados sin detener el proceso productivo.

En el presente trabajo se estudia la influencia de la no linealidad en el sistema pilote-terreno, para lo cual se hace necesario obtener las soluciones de modelos físico-matemáticos expresados a través de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales necesarias a tales efectos. Por otra parte, debido a la presencia de un gran número de parámetros que intervienen en el modelo se implementa la técnica de elementos finitos, considerando un modelo lineal, para determinar las características estáticas y dinámicas del sistema para las condiciones planteadas en el problema.

1. Introducción

Los *pilotes* pueden ser considerados como elementos estructurales que se introducen profundamente en el terreno para transmitir las cargas de la cimentación a los estratos más resistentes. Estos se emplean generalmente cuando el terreno superficial tiene baja capacidad de carga, cuando se tiene requisitos muy estrictos de asentamientos admisibles y cuando se quieren evitar cimentaciones muy voluminosas apoyadas en estratos de suelos poco favorables para la construcción. [2].

Para comprobar la seguridad de la cimentación es importante conocer con cierta periodicidad el estado técnico del pilote que permita conocer sus condiciones físicas después que se encuentra situado en el lugar de trabajo.

En la actualidad, uno de los métodos más utilizados para diagnosticar el estado técnico de los pilotes de cimentación es a través de la medición de sus vibraciones mecánicas. Este método tiene una significativa utilidad desde el punto de vista económico pues permite obtener óptimos resultados sin detener el proceso constructivo.

Por la importancia que tiene realizar un estudio de los aspectos teóricos asociados al diagnóstico del estado técnico de los pilotes previo al trabajo experimental, es que nos hemos propuesto determinar el comportamiento dinámico de pilotes de cimentación fundidos "in situ" en condiciones lineales y no lineales del terreno, aplicando modelos discretizados y el modelado de cuerpos continuos.

2. Desarrollo

El método de diagnóstico del estado técnico de los pilotes a través del estudio de sus vibraciones mecánicas basa en la aplicación de una fuerza excitadora en la parte superior del pilote y obtener un registro de la respuesta dinámica medida en la sección superior del mismo.

En este caso se ha considerado que el pilote tiene una longitud de 20 metros y un radio de 0.44 metros, construido de hormigón armado y rodeado por un terreno de tipo arcilloso hasta una distancia radial de 3.23 metros y hasta 5 metros debajo de la punta del pilote, según muestra la figura :

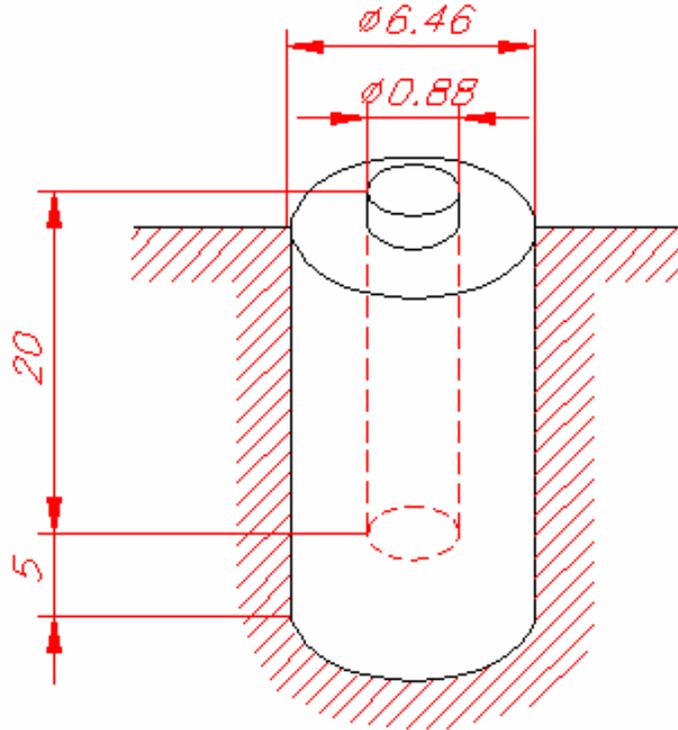


Fig.1: Representación tridimensional del sistema pilote-terreno

Se ha considerado que se ha aplicado una fuerza externa en la parte superior del pilote de dos formas diferentes:

- Axial.
- Transversal.

De acuerdo a estas suposiciones se obtienen entonces las ecuaciones que rigen el movimiento en cada caso.

Las propiedades de los materiales utilizadas en los cálculos son las siguientes:

Tabla1. Propiedades de los materiales

Parámetros	Símbolo	Unidad	Arcilla	Hormigón
Densidad	ρ	Kg/m ³	1 700	2 400
Módulo de Young	E	Pa.	9×10^6	$2,1 \times 10^6$
Coefficiente de Poisson	ν	-	0,45	0,17

Cálculo de la masa del pilote

$$m = \rho \cdot V \quad (1)$$

donde:

ρ es la densidad del hormigón y V es el volumen del pilote.

El volumen del pilote es $V \approx 12,16 \text{ m}^3$.

Por tanto :

$$m \approx 2,92 \times 10^4 \text{ kg.}$$

Cálculo de las constantes de muelle

- Para una excitación axial (K_a).
- Para una excitación transversal. (K_t).

Los valores de K_a y de K_t son calculados utilizando las expresiones:

$$K_a = \frac{4Gr}{1 - \nu} \quad (2)$$

$$K_t = \frac{32(1-\nu).G.r}{7-8\nu} \quad (3)$$

G: Módulo de distorsión de la arcilla.

ν : Coeficiente de Poisson de la arcilla.

r: radio del pilote.

El módulo de distorsión de la arcilla puede ser calculado utilizando la fórmula:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$G = \frac{9E6}{2(1+0,45)} \quad \text{Pa.} \quad (4)$$

$$G = 3,1E6$$

Por lo que se obtiene que:

$$K_a = 9,92 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$K_t = 7,06 \times 10^6 \text{ N/m.}$$

Cálculo del coeficiente de amortiguamiento.

- Para una excitación axial (C_a).
- Para una excitación transversal (C_t).

En el cálculo del amortiguamiento se ha tenido en cuenta que el valor típico de amortiguamiento interno de la arcilla está en el rango de valores de 0,02 a 0,05 [3], el cual se denota por ξ . En este caso se ha supuesto que $\xi=0,02$.

Como se conoce :

$$\xi = \frac{c}{c_{critica}}$$

c es la constante de amortiguamiento y

$$c_{critica} = 2\sqrt{km} \quad [3].$$

En el caso de la excitación axial

$$c_{critica} = 1,07 \times 10^6$$

y en la excitación transversal

$$c_{critica} = 9,08 \times 10^5.$$

Por tanto:

$$c_a = 2,15 \times 10^4 \text{ kg/s.}$$

$$c_t = 1,82 \times 10^4 \text{ kg/s.}$$

3. Análisis del sistema terreno-pilote cuando ha sido sometido ha una excitación axial

Cuando en la sección superior o punta del pilote se aplica una fuerza externa transversalmente, la fuerza elástica puede ser modelada como un polinomio cúbico cuya expresión es:

$$F_e(x) = k_t(x + \beta.x^3) \quad (5)$$

β : coeficiente de no linealidad.

Interesa conocer el comportamiento del sistema cuando la masa es separada de su posición de equilibrio 1 unidad, considerando un amortiguamiento de tipo viscoso, el movimiento entonces es modelado a través de la ecuación diferencial:

$$(2,92 \times 10^4) \frac{d^2 x}{dt^2} + (1,82 \times 10^4) \frac{dx}{dt} + (7,06 \times 10^6) \cdot (x + \beta \cdot x^3) = 0 \quad (6)$$

sujeto a las condiciones iniciales:

$$x(0) = 1 \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0 \quad (7)$$

las cuales representan la posición inicial y la velocidad inicial del sistema respectivamente, por lo que estamos en presencia de un problema de Cauchy para una ecuación diferencial no lineal de segundo orden homogénea, que representa el movimiento para una vibración libre con amortiguamiento viscoso y rigidez cúbica.

La solución del problema de Cauchy planteado anteriormente se obtiene aplicando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, utilizando el asistente matemático MATLAB, seleccionando distintos valores de β .

Se obtuvo la solución gráfica para cada valor de β , cada gráfico muestra como se comportan el desplazamiento y la velocidad del sistema, lo que permite conocer aproximadamente el valor de la frecuencia natural f_n (Hz) y la amplitud de la velocidad en cada caso. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 2. Relación de resultados

β	0	0,1	0,25	0,5	0,75	1	5	10	12	15	18	20
f_n	2,4	2,6	2,6	2,6	2,8	2,8	3,8	4,8	5,2	5,6	6,2	6,4
A	14	15	15	16	17	18	28	37	40	44	48	51

A: Amplitud de la velocidad.

f_n : Frecuencia natural en Hz.

Según los resultados que se muestran, la frecuencia natural aumenta a medida que aumenta el coeficiente de no linealidad, lo que es característico de un resorte rigidizado.

4. Análisis del sistema terreno-pilote cuando ha sido sometido ha una excitación axial

Cuando al pilote se le aplica una fuerza excitadora en forma axial en la sección superior del mismo, se asume que mientras el sistema se comporta linealmente no hay rozamiento entre el pilote y el terreno, comenzando a incrementarse a partir de que el sistema deja de ser lineal. Como se demuestra más adelante mediante la aplicación del métodos de los elementos finitos, al sobrepasar la tensión tangencial límite de la arcilla el sistema comienza a perder sus propiedades elásticas y por consiguiente se produce un deslizamiento entre la superficie del concreto y de la arcilla dando origen al amortiguamiento de Coulomb.

Al igual que en el caso de la excitación transversal interesa conocer el comportamiento de la masa cuando esta es separada de su posición de equilibrio 1 unidad, lo que da lugar al Problema de Cauchy siguiente:

Resolver la ecuación diferencial no lineal:

$$2,92x10^4 \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) + \mu \cdot 7600 \cdot \text{sign} \left(\frac{dx}{dt} \right) + 9,92x10^6 \cdot x = 0 \quad (8)$$

sujeta a las condiciones iniciales (7).

μ es el coeficiente de rozamiento de la arcilla,
 $\mu \in [4,10]$

$n = 7600 \text{ N}$.

La solución es calculada aplicando el método de Runge-Kutta de cuarto orden utilizando el asistente matemático MATLAB, para $\mu = 4$ y $\mu = 10$.

Además se obtiene la solución de la ecuación diferencial lineal:

$$2,92x10^4 \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) + 2,15 \times 10^4 \left(\frac{dx}{dt} \right) + 9,92x10^6 \cdot x = 0 \quad (9)$$

sujeta a las condiciones iniciales (7), la cual representa la vibración libre amortiguada del sistema, considerando el amortiguamiento viscoso.

La frecuencia natural en el caso de la excitación axial permanece constante y aproximadamente igual a

$$w_n = \sqrt{\frac{K_a}{m}}$$

$$w_n = \sqrt{\frac{9,92x10^6}{2,92 \times 10^4}} \quad \text{rad/seg,}$$

$$w_n = 18,43$$

por lo que

$$f_n = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$f_n = \frac{18,43}{2\pi} \quad \text{Hz.}$$

$$f_n = 2,93$$

El análisis lineal para la excitación axial y para la excitación transversal va a depender fundamentalmente de la constante de amortiguamiento que en ambos casos son diferentes para un terreno homogéneo. En el caso de la excitación axial las oscilaciones cesarán más rápido que en el caso de la excitación transversal debido a que la constante de amortiguamiento para el caso axial es 1,18 veces mayor que en el caso transversal.

5. Análisis estático y dinámico mediante el método de los elementos finitos del sistema pilote-terreno

El análisis estático y dinámico del sistema pilote-terreno, aplicando el método de los elementos finitos es realizado mediante la utilización del programa MSC/Pal2, considerando que el sistema pilote-terreno se ajusta a un modelo lineal. Este análisis permitió:

1. Determinar la constante elástica del terreno sobre el pilote, tanto lateral como de punta.
2. Determinar las cargas límites que producen sobre un suelo homogéneo el cambio del estado elástico al estado plástico, o sea el nivel de carga para cual el sistema pierde las condiciones de linealidad.
3. Determinar las frecuencias naturales.
4. Determinar el efecto del amortiguamiento viscoso dentro del sistema.

Determinación de la constante elástica del terreno.

El valor de K_a obtenido es comprobado utilizando el modelo estático del sistema pilote-terreno mediante la aplicación del método de los elementos finitos. En este caso, la constante elástica utilizada en el cálculo está compuesta por la rigidez que aporta el terreno lateral más la rigidez que aporta el terreno que se encuentra debajo de la punta inferior del pilote, o sea: $K_a = K_p + K_f$ donde K_p es la constante de rigidez de punta y K_f es la constante de rigidez lateral.

Para obtener ambas rigideces (K_p y K_f) por el método de los elementos finitos es necesario obtener el desplazamiento vertical del pilote considerando dos casos:

1. Desplazamiento lateral: Se considera que el pilote solo está sostenido por el fuste y no existe soporte de fondo.
2. Desplazamiento de fondo Se considera que el pilote solo está sostenido por la punta y no existe soporte por el fondo.

Como se conoce:

$$K_p = \frac{F}{\delta_p}$$

$$K_f = \frac{F}{\delta_f}$$

δ_p desplazamiento medio en el sentido axial para el caso 1.

δ_f desplazamiento medio en el sentido axial para el caso 2.

Mediante la utilización del método de los elementos finitos, empleando el MSC/Pal2 se obtienen los desplazamientos en el sentido axial midiéndose estos solamente en los nodos situados a 45° del eje horizontal del modelo del sistema discretizado y que están ubicados en la superficie de contacto entre el pilote y el terreno, se obtuvo que el valor promedio de $\delta_f = 3,21$ m y el valor promedio de $\delta_p = 1,67e-3$ m.

Luego:

$$K_f = \frac{20000}{3,21} = 6,2e3 \text{ N/m.}$$

$$K_p = \frac{20000}{1,87e-3} = 1,07e7 \text{ N/m}$$

Por tanto, calculando el error:

$$\text{error} = \frac{VE - VA}{VE} \cdot 100\%$$

$$\text{error} = \frac{10,7e6 - 9,92e6}{10,7e6} \cdot 100\%$$

$$\text{error} = 7\%$$

VE: valor de K obtenido por el método de los elementos finitos.

VA: valor obtenido mediante la aplicación de la fórmula de K_a .

Teniendo en cuenta la heterogeneidad de los terrenos en los cuales las propiedades físicas son muy variables, un error de un 7% se puede considerar bueno y se recomienda utilizar la expresión empírica propuesta en la literatura para continuar los estudios de otros terrenos.

6. Determinación de las cargas límites que producen sobre un suelo homogéneo el cambio de estado plástico

En los estudios realizados sobre cimentaciones en suelos arcillosos se ha establecido que los fallos que se originan son debido a la acción de las tensiones tangenciales. Las tensiones tangenciales máximas pueden ser calculadas según la expresión:

$$\tau_{\max} = c + \sigma \cdot \tan\phi$$

c es la coherencia del terreno, $c = 60\,000$ Pa.

σ es la tensión total de compresión soportada por el terreno, $\sigma = 1500\ 000\ \text{Pa}$.

φ es el ángulo de fricción, $\varphi = 0$ grados.

de aquí que:

$$\tau_{\text{máx}} = 60\ 000\ \text{Pa}$$

o sea, cuando las tensiones tangenciales en la superficie de contacto entre el pilote y el terreno sobrepasan este valor ocurrirá el fallo y el pilote comenzará a deslizarse con respecto al terreno.

Para determinar la distribución de tensiones producidas en el sistema pilote-terreno se realizó la comprobación por el método de los elementos finitos, se le aplicó una fuerza vertical en el extremo superior del pilote incrementándose progresivamente hasta obtener la gama de tensiones dentro de la cual se sobrepasan las tensiones tangenciales máximas admitidas por el terreno, obteniéndose que para valores de tensiones normales superior a $120\ 000\ \text{Pa}$. (equivalente a $\tau = 60\ 000\ \text{Pa}$) el terreno pierde linealidad.

Tabla 3. resultados obtenidos para las primeras frecuencias naturales

Orden de obtención de las frecuencias naturales	1 ^{ra.}	2 ^{da.}	3 ^{ra.}	4 ^{ta.}	5 ^{ta.}
f_n	6,3	11,8	18,1	30,1	42,4

Como puede observarse, existe una pequeña diferencia entre el primer valor obtenido de la frecuencia natural utilizando el método de los elementos finitos y el valor obtenido para un sistema de un grado de libertad, debido fundamentalmente a los errores propios que se cometen cuando se modela el sistema pilote-terreno a través de una técnica numérica de aproximación, en particular la técnica de los elementos finitos.

8. Influencia del amortiguamiento viscoso en el comportamiento dinámico del sistema

Con el objetivo de realizar un estudio de los modos de vibrar en el sistema analizado se tomó como base determinar

Con este análisis se puede observar que:

- Las tensiones máximas se producen en sentido vertical en la superficie del terreno.
- Las tensiones máximas se producen en sentido en sentido radial en la zona de contacto entre el pilote y el terreno.

7. Determinación de las frecuencias naturales

Las frecuencias naturales en Hz. para una excitación sinusoidal de amplitud 1, aplicada en el nodo 1 en dirección axial y tomando las respuestas en el mismo nodo, son calculadas mediante el programa DYNA2, del MSC/Pal2. Los resultados obtenidos para las primeras frecuencias naturales se muestran en la siguiente tabla:

la función respuesta de frecuencias cuando al sistema le es aplicada una excitación sinusoidal, para posteriormente utilizarla para determinar el efecto producido por el amortiguamiento en el sistema. Se realizaron varios cálculos de esta función tomando distintos valores de amortiguamiento interno, incluyendo los valores de amortiguamiento interno de la arcilla.

Los resultados de este análisis se muestran en la siguiente figura 2.

Analizando la función respuesta de frecuencias para los distintos valores de ξ se observa que cuando ξ toma valores inferiores a 0,01 se tienen varios picos en el espectro y para valores superiores a este solo se observa un solo pico, pues los demás no son significativos.

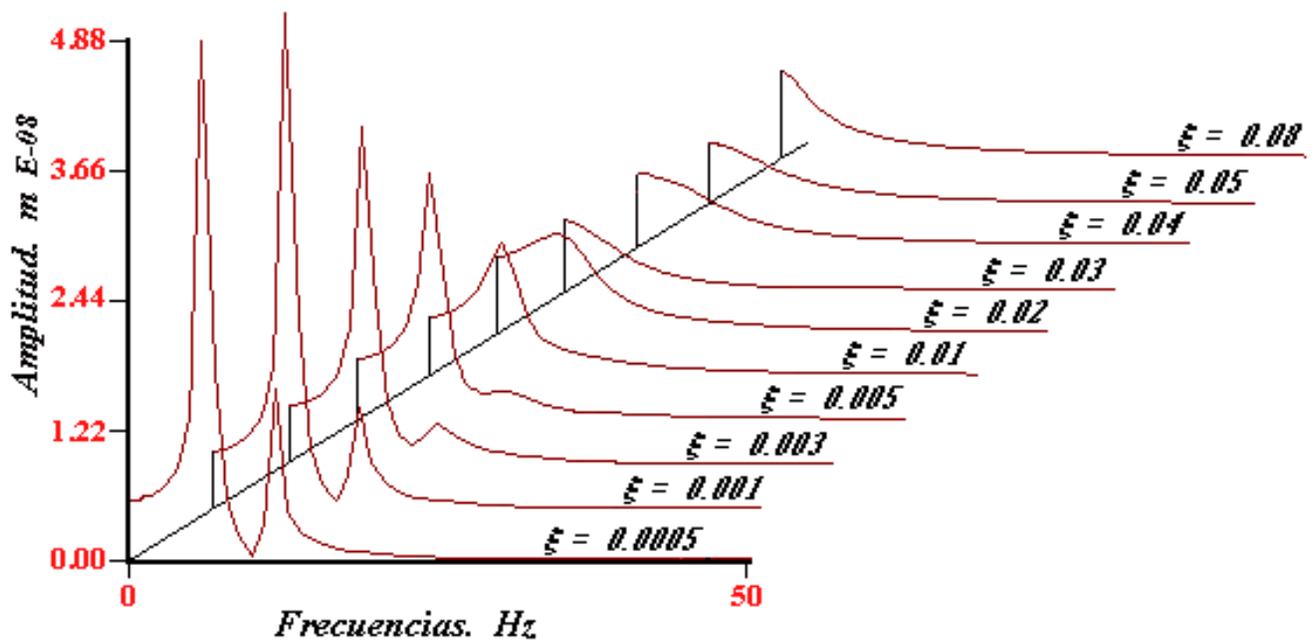


Fig. 2. Función respuesta de frecuencias para distintos valores de ξ

9. Conclusiones

1. Al modelar matemáticamente el sistema pilote-terreno, cuando este es sometido a una excitación axial y a una excitación transversal en la sección superior del pilote, obteniéndose la solución de los modelos matemáticos expresados a través de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales, permitió conocer la frecuencia natural, el desplazamiento y la velocidad del sistema en cada caso.
2. Se calcula la constante de rigidez del terreno mediante métodos analíticos y mediante elementos finitos. Al comparar estas dos magnitudes se comete un error del 7%, por lo que se propone utilizar la expresión analítica de la constante de rigidez del terreno al modelar el sistema.
3. Se comprueba que para valores de tensiones normales superiores a 120 000 Pa el terreno pierde condiciones de linealidad.
4. Se realiza el cálculo de la frecuencia natural del sistema cuando es sometido a una excitación axial por métodos analíticos y mediante la técnica de elementos finitos, suponiendo condiciones de linealidad del sistema.
5. Cuando el sistema pilote-terreno es sometido a una excitación axial en el nodo 1, dados los valores típicos de amortiguamiento de la arcilla, el mismo se comporta como un sistema de un solo grado de libertad; por lo que se valida el modelo propuesto para el movimiento del pilote a través de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y no lineales, según sea el caso que se considere.

Referencias

1. Alvarez Vasallo, José A. "Los elementos finitos aplicados a la técnica" Apuntes para un curso de posgrado, ISPJAE

2. Davidian, Zaven, "Pilotes y cimentación sobre pilotes" Editores Técnicos Asociados, 2da edición, Barcelona, 1977
 3. Steidel, Robert F, Jr. "Introducción al estudio de las vibraciones mecánicas" .Compañía Editorial Continental S.A. 1981, México
 4. Thomson, William T . "Teoría de vibraciones. Aplicaciones" Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana S.A, 1982, México
-

Non-linear dynamical analysis for foundation piles molten " in situ "

Abstract

There are several techniques nowadays to control the technical state of the foundation piles. One of the most used techniques is the study of mechanical vibrations of the piles since this method turns out very efficient because it allows obtaining optimum results without stopping the productive process.

Throughout this work, the influence of non-linearity in the ground-pile system is studied, such influence appears because of the different characteristics and great variety of the soils, then, for this study, it is made necessary to obtain the solutions of mathematics and physical models expressed through non-linear ordinary-differential equations needed as well. On the other hand, due to the presence of a great number of parameters acting in the model, the technique of finite element is implemented, taking into account a lineal model to determine the static and dynamic characteristics of the system according for the conditions stated in the mathematical problem.