Desarrollo del método de los elementos finitos (primera parte)

L. Otero Pereiro, C. Novo Soto y **M. Fernández Salgado**
Departamento de Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería Mecánica,
Instituto Superior Politécnico *José Antonio Echeverría*, La Habana 19390, Cuba.
E-mail: mecanica@cujae.ispjae.edu.cu

(Recibido el 5 de mayo de 1997; aceptado el 19 de junio de 1997)

Resumen

El Análisis por Elementos Finitos constituye hoy día una herramienta de cálculo para resolver problemas de ingeniería, en estructuras, elementos de máquinas, mecánica de los fluidos y transferencia de calor, entre otros. Esto ha propiciado una gran difusión de los programas de cálculo asistidos por computadora, con los cuales se afirma es posible disminuir el costo de un proyecto hasta en 50%.

En el artículo se demuestra que solo mediante la comprensión de los principios en que se basa el método de los elementos finitos se podrá hacer un empleo adecuado de cualquiera de estos sistemas de cálculo. Además, se explica porqué este método no constituye un descubrimiento dentro del campo de la resistencia de los materiales y la teoría de la elasticidad, sino que sienta sus bases sobre estos aspectos.

1. Introducción

Antiguamente, las fuerzas en los elementos de una armadura eran determinadas por las condiciones de equilibrio en las uniones. Más tarde, J. C. MAXWELL (l88l-l879) introdujo el método de las secciones con el empleo de los hoy conocidos *diagramas de Maxwell*, pero el incremento en el empleo de metal en la construcción de estructuras para puentes obligó a realizar análisis más profundos de los problemas y métodos de cálculo.

De esa forma, se definieron armaduras estáticamente determinadas, siguiendo las teorías de MÖBIUS, quien afirmara "...para tener en equilibrio un sistema de barras conectadas entre sí es necesario tener no menos de 2n-3 barras para formar un sistema rígido en un plano y 3n-6 barras para un sistema espacial..."

Luego MOHR encontró los requerimientos respecto al número de barras necesarias para formar un sistema rígido estáticamente determinado, demostrando la existencia de armaduras estáticamente determinadas que no pueden ser analizadas por los métodos de MÖBIUS.

Asimismo, MOHR propuso la aplicación del principio de los desplazamientos virtuales para tales sistemas; método este que fue sustituyendo los métodos de las uniones y de las secciones en la misma medida en que las estructuras se complicaban, como las armaduras de enrejado.

Uno de los principales problemas radicaba en el cálculo de los puentes sometidos a carga en movimiento, encontrándose una solución con el empleo del *método de las líneas de influencia*, el cual permitía aclarar el efecto del movimiento de la carga sobre los esfuerzos.

En el diseño de armaduras es frecuentemente necesario calcular las deflexiones o los desplazamientos en sólo algunas uniones, aportando entonces el Teorema de CASTIGLIANO un poderoso método para cuando hay fuerzas actuando en las uniones y una variante si éstas no existen.

El desarrollo subsiguiente llevó a la construcción de armaduras estáticamente indeterminadas, para las cuales se desarrollaron, sobre la base de los mismos principios y teoremas básicos, los hoy conocidos *método de las fuerzas* y *método de las deformaciones*, con los cuales pueden realizarse una gran cantidad de cálculos en la estructura, que van aumentando en complejidad y sobre todo en volumen al ser mayores las estructuras, aumentar su grado de hiperestaticidad, su complejidad geométrica o constructiva.

Otras formas han sido empleadas en el cálculo de estructuras, como los llamados *métodos matriciales* y los *métodos variacionales* surgidos del desarrollo de las matemáticas, con aplicación de la Teoría de Elasticidad.

En los métodos variacionales, los desplazamientos elásticos que surgen en un cuerpo bajo la acción de la carga se representan por las expresiones:

$$u=\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x,y,z)$$

$$v=\sum_{i=1}^{n} b_i \varphi_i(x,y,z) \qquad (1)$$

$$w=\sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(x,y,z)$$

donde:

f, φ, Ψ son funciones seleccionadas a priori;
a, b, c son coeficientes desconocidos que se determinan a partir de la condición de energía potencial mínima del sistema.

2. Fundamentos teóricos

Las dificultades fundamentales al emplear los métodos variacionales están en la elección de las funciones aproximadas y en la cantidad necesaria para obtener un resultado satisfactorio. Además, se dificulta el estudio de las particularidades locales del estado tensional, es decir las concentraciones de tensiones.

Uno de los más recientes y actuales métodos lo constituye el Método de los Elementos Finitos (MEF) que es en esencia una generalización de los métodos estándar de análisis estructural, que permite el cálculo de esfuerzos y desplazamientos de estructuras y sólidos en dos y tres dimensiones.

Por ello, puede establecerse una relación entre la Teoría de la Elasticidad y el Método de los Elementos Finitos.

Analicemos el estado tensional y deformacional sobre la base del análisis de un volumen elemental, como comúnmente se realiza en Teoría de la Elasticidad.

Entre las componentes del estado tensional y las del estado deformacional existe cierta dependencia. Cuando se trata de deformaciones pequeñas, esta dependencia es lineal y se denomina Ley de HOOKE Generalizada.

La forma más simple de dicha ley se observa en los cuerpos isótropos, caso para el cual los coeficientes de proporcionalidad entre las componentes del estado tensional y deformacional no dependen de la orientación de los ejes en el punto considerado.

Para determinar la expresión analítica de la Ley de HOOKE Generalizada se recurre al principio de superposición de las fuerzas y se observan por separado las fuerzas que aparecen en las caras de un volumen elemental, (principio de SAINT-VENANT).

En cualquiera de los planos del sistema de coordenadas, la deformación angular se determina teniendo en cuenta sólo las tensiones tangenciales correspondientes, deducidas por CAUCHY:

$$\gamma_{yz} = \tau_{yz} / G$$

$$\gamma_{zx} = \tau_{zx} / G \qquad (2)$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G$$

Sobre la magnitud γ_{ij} no influyen los otros dos pares de tensiones tangenciales ni las tensiones normales, lo cual se cumple recíprocamente para las otras dos deformaciones angulares posibles, lo que se deduce de las propiedades del material isótropo.

Esto explica las expresiones dadas en (2), de las cuales se deduce que para un cuerpo isótropo los ejes principales del estado tensional coinciden con los del estado deformacional, puesto que las tensiones tangenciales y las deformaciones angulares desaparecen al mismo tiempo.

De la misma forma que las deformaciones angulares no dependen de las tensiones normales, las deformaciones lineales tampoco dependen de las tensiones tangenciales. Esto se puede demostrar fácilmente como se hizo para el caso de las deformaciones angulares, deduciéndose también del teorema de reciprocidad de los trabajos. Si las tensiones normales no originan distorsión, sobre lo cual las fuerzas tangenciales podrían realizar cierto trabajo, las tensiones tangenciales tampoco originan desplazamientos lineales sobre los cuales puedan realizar trabajo las fuerzas normales.

El alargamiento unitario en la dirección del eje x debido al esfuerzo σ_x será σ_x / E. A las tensiones σ_y y σ_z les corresponden los alargamientos en la dirección del eje x, de signo contrario e iguales a $-\mu\, \sigma_y / E$ y $-\mu\, \sigma_z / E$.

Obteniéndose, con una agrupación conveniente de términos, las expresiones para las deformaciones unitarias longitudinales:

$$\varepsilon_x = 1/E\ [\ \sigma_x - \mu(\ \sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = 1/E\ [\ \sigma_y - \mu(\ \sigma_z + \sigma_x)] \qquad (3)$$

$$\varepsilon_z = 1/E\ [\ \sigma_z - \mu(\ \sigma_x + \sigma_y)]$$

De donde puede obtenerse la expresión para el estado de deformación volumétrico, sumando ambos términos de cada una de las tres expresiones (3).

de donde se obtiene

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 1/E\ [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) + \sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z) + \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Si

$$e = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

Entonces

$$e = [(1 - 2\mu) / E]\ (\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) \qquad (4)$$

Si

$$\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z = p$$

Entonces

$$e = [(3 - 6\mu) / E]\ p \qquad (5)$$

La expresión (5) sirve para determinar el valor límite del coeficiente de POISSON para cualquier cuerpo isótropo.

Con las ecuaciones (3) a (5) quedarán planteadas las expresiones de la Ley de HOOKE Generalizada para un cuerpo isótropo.

Según el convenio de signos, cuando el esfuerzo p sea positivo la deformación e deberá serlo también y según la expresión (5) esto sólo se cumplirá para valores del coeficiente de POISSON menores de 0.5, como límite para los cuerpos isótropos. Ya POISSON había hallado en sus experimentos que la relación entre la deformación transversal y longitudinal era 1/4.

La energía potencial acumulada en un volumen elemental se determina por la suma de los trabajos de las fuerzas distribuidas sobre la superficie de este volumen. Como se sabe, tales fuerzas pueden ser normales o tangenciales.

Las fuerzas normales que actúan en la dirección de cada uno de los ejes realizan un trabajo en los desplazamientos que se producen en la dirección de cada eje.

$$\begin{aligned} \sum F_x &= \sigma_x dydz \\ \sum F_y &= \sigma_y dxdz \\ \sum F_z &= \sigma_z dxdy \end{aligned} \qquad (7)$$

Entonces los trabajos vendrán dados por las expresiones

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\ \sigma_x\ dy\ dz * \varepsilon_x\ dx \\ &\tfrac{1}{2}\ \sigma_y\ dx\ dz * \varepsilon_y\ dy \\ &\tfrac{1}{2}\ \sigma_z\ dx\ dy * \varepsilon_z\ dz \end{aligned} \qquad (8)$$

Los trabajos realizados por las fuerzas tangenciales se expresarán como:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\ \tau_{yz}\ dx\ dy * \gamma_{yz}\ dz \\ &\tfrac{1}{2}\ \tau_{zx}\ dz\ dy * \gamma_{zx}\ dx \\ &\tfrac{1}{2}\ \tau_{xy}\ dx\ dz * \gamma_{xy}\ dy \end{aligned} \qquad (9)$$

Sumando los trabajos desarrollados por cada una de las fuerzas se obtendrá la energía potencial de la deformación para el estado tensional total.

$$\begin{aligned} dU = \tfrac{1}{2}\ dxdydz\ (\ &\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y \\ &+ \sigma_z\varepsilon_z+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx}+\tau_{xy}\gamma_{xy}) \end{aligned} \qquad (10)$$

Así, en el período elástico, el trabajo desarrollado por las fuerzas sobre el elemento diferencial se transforma en energía potencial deformacional, teniendo en cuenta el principio fundamental:

$$dT = dU \qquad (11)$$

donde:

$$\begin{aligned} dT &= \tfrac{1}{2}\sigma_x dydz \cdot \varepsilon_x dx \\ dF &= \sigma_x dydx \end{aligned} \qquad (12)$$

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$

$$du = \varepsilon_x dx \qquad (13)$$

por tanto:

$$dU = dT = \sigma_x dydz \cdot \varepsilon_x dx$$

o sea:

$$dU = dT = \sigma_x \varepsilon_x (dxdydz)$$

finalmente:

$$dU = dT = \sigma_x \varepsilon_x dV \qquad (14)$$

Si se superponen los trabajos desarrollados por cada una de las fuerzas que pueden actuar en un volumen elemental, como caso más general se obtendrá la ecuación (10) que ya fue deducida con antelación.

Esto puede expresarse en forma matricial, como:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \left\{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}\right\}^T \\ \{\varepsilon\} &= \left\{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}\right\}^T \end{aligned} \qquad (15)$$

De esta forma, para todo el volumen podrá plantearse:

$$U = \tfrac{1}{2}\iiint \{\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV \qquad (16)$$

Si se resuelve el producto del vector fila $\{\varepsilon\}^T$ por el vector columna $\{\sigma\}$ se podrá plantear:

$$\begin{aligned} U = \tfrac{1}{2}\iiint (&\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_z + \sigma_z\varepsilon_z \\ &+\tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz})dV \end{aligned} \qquad (17)$$

La integral de volumen, al resolverse, proporcionará el valor de la energía potencial deformacional del cuerpo, la energía potencial para un volumen elemental.

Cuando se reste el trabajo de las fuerzas volumétricas y el trabajo de las fuerzas superficiales (T) podrá aplicarse el principio de energía potencial mínima empleado en el Método de los Elementos Finitos (MEF) para la solución de los desplazamientos.

$$\tfrac{1}{2}\iiint \{\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV - T = 0 \qquad (18)$$

De forma más desarrollada:

$$\tfrac{1}{2}\iiint \{\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV - \iiint \{\partial\, U\}^T\{F\}dV - \iint \{\partial\, U\}^T\{p\}dS = 0$$

donde:

$\{F\}$; $\{p\}$ son los vectores de carga volumétrica y superficial.

$\{\varepsilon\}^T$; $\{\partial U\}^T$ transpuesta de los vectores deformación y desplazamiento.

Así queda demostrado, antes de explicar las formas y campos de aplicación así como sus ventajas y desventajas, cómo el MEF se basa en los principios de la Teoría de la Elasticidad y todos los conocimientos de resistencia de materiales acumulados y comprobados durante siglos por eminentes hombres de ciencia.

3. El método de los elementos finitos

El Método de los Elementos Finitos puede decirse que sentó sus bases sobre los métodos variacionales, el desarrollo de las computadoras digitales y los métodos numéricos, que resultan muy convenientes para la realización de los algoritmos de solución computarizados, sin dejar de tener presente todo el desarrollo de la Resistencia de Materiales y la Teoría de la Elasticidad [9, 12, 14, 16, 8].

El método tuvo sus comienzos como tal a finales de la década de los años 50 (1955-1960) pudiendo señalarse el empleo del término *finite element method* por vez primera en la 2da Conferencia de Electrónica y Computación en Pittsburg [1] , en un artículo presentado por el catedrático R.W. CLOUGH en Septiembre 8 y 9 de 1960. Sin embargo, ya en l954 un grupo de científicos encabezados por O.C.ZIENKIEWICZ, publicó un artículo titulado *In stress analysis: recent developments in numerical and experimental methods* [17], relacionado con el método de los elementos finitos, el cual luego apareciera en uno de los capítulos de un texto de CLOUGH [4], donde se presenta la filosofía y los conceptos básicos del método para aplicarlo a problemas de elasticidad bidimensional.

El procedimiento para analizar por el MEF medios elásticos continuos [6], puede ser dividido en tres fases básicas:

1- Modelación de la estructura o el sólido.
2- Evaluación de las propiedades del elemento.
3- Análisis estructural del modelo ensamblado.

Cada una de estas fases contiene un complejo sistema matemático de evaluación y realización. No obstante, puede decirse que, como todo sistema de análisis estructural, puede acometerse su solución por el método de las fuerzas (rigideces directas) preferido por algunos autores [6], cuyo primer desarrollo formal fue publicado en el año 1959 por M.J.TURNER [13, 15], durante una conferencia en Alemania. O bien puede utilizarse el método de los desplazamientos [22], más recomendado en los casos de estructuras complejas.

Así, en la década de los años 60 se publicaron la mayor cantidad de textos relacionados con esta temática, sus principios básicos y formulaciones para el cálculo dentro del comportamiento elástico de los cuerpos.

El conocimiento sobre la plasticidad de los cuerpos, esbozado en su tiempo por YOUNG, fue enriquecido por los aportes del artículo que R. HILL publicara en 1950 sobre la Teoría Matemática de la Plasticidad [7], por lo cual es considerado como el pionero en esta teoría y sus aplicaciones. Las nuevas herramientas permitieron entrar con mayor facilidad en el análisis de los fenómenos plásticos [18].

El "clásico mas leído" sobre el MEF y con mayor cantidad de publicaciones de todo tipo es ZIENKIEWICZ [17, 18], quien aborda en su extensa obra problemas de estructuras y sólidos continuos, homogéneos, isótropos o anisótropos, con comportamiento elástico, plástico o elasto-plástico.

Muchos científicos se dedican hoy día a estos problemas, así como al desarrollo de programas de computación sobre este método para diversos fines.

Y lo que es más importante, hay instituciones dedicadas a esta labor, como el Colegio de Aeronáutica, el Centro de Impacto y la Escuela de Ingeniería Mecánica en Crandfield, Inglaterra. En los Estados Unidos, centros como el MIT y el Departamento de Ingeniería Espacial de la Universidad de Texas, se ocupan de estos trabajos. La NASA en Estados Unidos ha desarrollado el programa de computación *Cosmos* con el que fueron analizadas las estructuras de los transbordadores espaciales.

No se debe olvidar el Instituto de Investigaciones de la Industria de Automóviles en Budapest, Hungría [10], el cual sentó pautas en estos trabajos hasta la desaparición del campo socialista.

Un método de más reciente desarrollo es el llamado Método de los Elementos de Contorno [2], el cual comenzó su ascendente desarrollo en la década de los años setenta, dado el afán de los científicos de encontrar respuestas numéricas a problemas de ingeniería cuyas soluciones no es posible encontrar por métodos analíticos, o en las que aún otros métodos numéricos como el de elementos finitos requieren de mayor laboriosidad como son los casos de análisis de las fracturas [1, 11], siendo su principal ventaja la reducción de la magnitud de los datos a manipular, obteniénde su solución a partir de una ecuación integral que relaciona las variables del contorno [1].

En la preparación de este artículo se han consultado numerosas obras. En la bibliografía aparecen solo las más importantes, en opinión de los autores.

4. Conclusiones

En este artículo se brinda una panorámica simplificada del desarrollo del método de elementos finitos, así como el establecimiento de los procedimientos fundamentales para la aplicación del mismo.

En primer lugar, queda establecido cómo este método no constituye un descubrimiento dentro de la Resistencia de Materiales y la Teoría de la Elasticidad, sino más bien la aplicación de los conocimientos hasta el momento acumulados, en un nuevo estadio del desarrollo tecnológico.

La instrumentación de las ya conocidas teorías y formulaciones, como la ley de HOOKE generalizada, la energía potencial de la deformación, el principio de los trabajos virtuales, las formulaciones para el comportamiento elástico de los cuerpos, según la teoría de elasticidad, con las técnicas matemáticas de análisis numérico y matricial para las computadoras electrónicas, sin las cuales el método se haría prácticamente inaplicable.

En realidad, como su nombre lo indica, es un método de aplicación de conocimientos de la Resistencia de los Materiales y la Teoría de la Elasticidad que fueron desarrollados desde hace más de un siglo, en el que cualquier medio continuo es convertido en un medio discreto que más tarde se compone para ofrecer los resultados del medio real.

En la segunda parte de este artículo se tratará sobre los pormenores de la teoría del Método de los Elementos Finitos, y su aplicación al cálculo de estructuras y elementos de máquinas, así como sobre los programas profesionales más difundidos para la aplicación de este método asistido por computadora.

Bibliografía

1. E. ALARCÓN. *Notas sobre el Método de Elementos Finitos*. Universidad Politécnica de Madrid, Sección de Publicaciones, Madrid , l978.
2. E. ALARCÓN. *Guia de introducción al método de los elementos de contorno*. Universidad Politécnica de Madrid, Sección de Publicaciones, Madrid, l983.
3. ARGIRIS. Matrix methods for structural analysis. *Proc. 4th Meeting of AGARD Structure and materials panel*, Paris, July l962.
4. R. W. CLOUGH. The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. *Proc. 2nd Conf. Electronic Computation, ASCE*, Pittsburg, Pa., Sept. 8-9 , l960.
5. R. W. CLOUGH. *The Finite Element Method in Structural Mechanics*. University of California, Berkeley, and National Science Fundation (Pub. of Chap.7 of *Philosophy of the Finite Element Procedure*).
6. P. H. DENKE. Digital Analysis of non-linear structure by the force method. *Proc. l4th Meeting of AGARD Structure and Materials Panel*, Paris, July, l962.
7. R. HILL. *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford, Clarendon Press, l950.
8. S. G. LEKHNITSKII *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*. San Francisco, Holden-Day, l963.
9. A. E. H. LOVE. *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover Publications, New York, l944.
10. M. MATOLCSY. *Fatigue life distribution of vehide frame structures*. Research Institute of Automobile Industry, Autokut Budapest, Hungary, l984.
11. V. Z. PARTON. *Mecánica de la destrucción* , Editorial Mir , Moscú, 1990.
12. Y. S. SOKOLNIKOFF. *Mathematical Theory of Elasticity.* McGraw Hill Book Co. , New York, 1956.
13. M. J. TURNER. *The direct stiffness method of structural analysis*. Structures and Materials Panel Paper, AGRAD Meeting, Aachen, Germany, Sept 17, 1959.
14. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER. *Theory of elasticity*. McGraw Hill Book Co. , New York, 1951.

15. Y. TODHUNTER, K. PEARSON. A history of the theory of elasticity. *Mechanical Engineering.*1985, No.1, pag. 322.

16. C. T. WANG *Applied elasticity*. MacGraw Hill, 1953.

17. O. C. ZIENKIEWICZ, G. S. HOLISTER. *In stress analysis: recent developments in numerical and experimental methods*. Wiley, New York, 1954.

18. O. C. ZIENKIEWICZ, S. VALLIAPAN, P. KING. *Elasto plastic solutions of engineering problems. Initial stress Finite Element Method.* IJNME, **1** (1969), No 1.

Development of the finite element method (first part)

Abstract

Finite element analysis embodies nowadays a powerful calculation tool to solve engineering problems in structures, machine elements, fluid mechanics and heat transfer, among others. This has stimulated great diffusion of computer-aided programs, which are said to allow savings of up to 50% in the cost of projects.

This paper shows that only by means of an understanding of the basic principles of the finite element method it is possible to employ to its best such computational systems. Besides, it is explained why this method does not constitute a discovery in the field of strength of materials and theory of elasticity, but on the contrary, its bases rest on the same principles.