Algorítmica del diseño mecánico

J. Martínez Escanaverino, A. García Toll y **T. Ortiz Cárdenas**
Departamento de Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería Mecánica,
Instituto Superior Politécnico *José Antonio Echeverría*, La Habana 19390, Cuba.
E-mail: pillues@mecanica.ispjae.edu.cu

(Recibido el 1° de mayo de 1997; aceptado el 15 de junio de 1997)

Resumen

Se demuestra que cualquier procedimiento de diseño mecánico puede interpretarse como un proceso de solución de problemas sobre modelos matemáticos, lo cual equivale a la obtención de los algoritmos de solución de tales problemas. Se utilizan los grafos bicromáticos como medio de expresión de los modelos, problemas y algoritmos. Se ilustran los conceptos teóricos con un ejemplo práctico tomado de la mecánica de los sólidos.

1. Introducción

Buena parte del fondo de conocimientos de todo ingeniero lo forman numerosos algoritmos, cuya aplicación adecuada depende mucho de un entendimiento pleno de los mismos. En particular, el ingeniero que trabaja Diseño Mecánico necesita ser capaz de elaborar algoritmos para resolver diversos problemas particulares que se le presentan en el ejercicio de su profesión.

Es decir, el análisis y la síntesis de algoritmos son habilidades esenciales para realizar con éxito el proceso intelectual de Diseño Mecánico, tanto el manual como el asistido por computadora.

Realmente, alcanzar la debida destreza en la comprensión y elaboración de algoritmos no resulta tarea fácil. En los libros y revistas técnicas algunos autores expresan los algoritmos con ayuda de explicaciones en lenguaje natural. Otros, se apoyan en diagramas de bloques u organigramas. Un tercer grupo de ingenieros utiliza programas escritos en un lenguaje de programación. Y existen diversas variantes eclécticas.

En general, los resultados obtenidos con estas técnicas distan de ser satisfactorios; resulta difícil asimilar los algoritmos presentados como prescripciones que no reflejan su génesis y, en consecuencia, resulta muy difícil para el ingeniero crear nuevos algoritmos cuando se necesitan.

Faltan herramientas efectivas para la actividad algorítmica de los ingenieros. Se requiere de nuevas técnicas de representación, preferentemente gráficas, cuya capacidad expresiva permita reflejar el proceso de formación de los algoritmos, y no simplemente sus aspectos externos.

2. Modelos y problemas

Según el Diccionario Oxford de Computación [1], un *algoritmo* es una sucesión preestablecida de reglas precisas para la solución de un problema en un número finito de pasos.

Según la definición dada, un algoritmo siempre resuelve un problema. Por tanto, la comprensión del concepto de algoritmo nos lleva de modo natural al concepto de problema.

En términos rigurosos, un *problema* P está definido cuando para un objeto o proceso determinado se dan un conjunto de datos de entrada E, y un conjunto de datos de salida S. Simbólicamente,

$$P \equiv \langle E, S \rangle \tag{1}$$

Donde E es un conjunto de datos de valor conocido, en tanto que S es un conjunto de datos de valor desconocido. Si alguno de los conjuntos E ó S está ausente [2], se tiene un *problema incompleto*. Si solo se cuenta con E, se ha definido una *situación*. Si solo se cuenta con S, se ha definido una *meta*.

Como puede apreciarse de su definición, el concepto de problema está ligado inevitablemente al concepto de *objeto* o *proceso*. En los cálculos de ingeniería, todo objeto o proceso se representa por medio de un *modelo matemático* M, esto es, por un conjunto de *relaciones* R definido en un conjunto de *variables* V. Simbólicamente,

$$M \equiv \langle R, V \rangle \tag{2}$$

Al plantearse un problema (1) sobre un modelo matemático (2), el conjunto de variables del modelo se divide en un conjunto de *variables de entrada E* y en un conjunto de *variables incógnitas X*. Esto es,

$$V = E + X \tag{3}$$

La exposición no pierde generalidad si se considera que el conjunto de variables de entrada E y el conjunto de *variables de salida S* son disjuntos. Esto es,

$$E \cap S = \varnothing \tag{4}$$

El conjunto de las variables de salida del problema debe estar contenido en el conjunto de las variables incógnitas. Simbólicamente,

$$S \subseteq X \tag{5}$$

Por tanto, al plantearse un problema (2) sobre un modelo matemático (1), queda de hecho definido un conjunto de relaciones F sobre un conjunto de incógnitas X. Simbólicamente,

$$P \equiv \langle F, X \rangle \tag{6}$$

donde

$$F \subseteq R \tag{7}$$

Por tanto, un problema es un conjunto de relaciones sobre un conjunto de incógnitas. Integrando las definiciones dadas, puede decirse que todo algoritmo resuelve un problema planteado sobre un modelo matemático**.**

Un algoritmo A es una sucesión de pasos p_i

$$A \equiv \{p_1, p_2, \dots p_n\} \tag{8}$$

Donde cada paso p_i es un subproblema de estructura

$$p_i \equiv \langle E_i, S_i \rangle \tag{9}$$

O sea, que en un algoritmo A el problema P a resolver está particionado en n subproblemas p_i que se resuelven en sucesión.

Como era de esperar, cada subproblema p_i se corresponde con un submodelo matemático m_i. Simbólicamente,

$$p_i \leftrightarrow m_i \tag{10}$$

Donde cada submodelo tiene la estructura

$$m_i \equiv \langle F_i, V_i \rangle \tag{11}$$

Si se analizan (10) y (11), puede llegarse a otra interpretación de la expresión (9). De acuerdo con dicha interpretación, cada paso de un algoritmo puede considerarse formado por un conjunto de relaciones donde se obtiene un conjunto de incógnitas.

Simbólicamente,

$$p_i \equiv \langle F_i, X_i \rangle \tag{12}$$

3. Grafos bicromáticos

Un *grafo G* está formado [3] por un conjunto W de puntos, llamados *vértices*, y un conjunto K de *líneas*, que unen los vértices entre sí.

Simbólicamente:

$$G \equiv \langle W, K \rangle \tag{13}$$

Si las líneas tienen una orientación, dada por una saeta, se denominan *arcos*. De lo contrario, se denominan *aristas*. Dos vértices unidos por una línea se dice que son *adyacentes*. Un grafo se denomina *bicromático* cuando sus vértices pueden colorearse con dos colores diferentes, de modo que no haya vértices adyacentes del mismo color. En este caso, el conjunto W de vértices se fracciona en dos conjuntos disjuntos de vértices de distinto color

$$W = W_1 + W_2 \tag{14}$$

Un modelo matemático puede representarse [4] por medio de un grafo bicromático no orientado, donde los vértices que representan a las variables tendrán un color, y los vértices que representan a las relaciones tendrán el otro color. Este grafo se denomina *grafo del modelo*, y para el mismo se cumple que

$$\begin{aligned} W_1 &= V \\ W_2 &= R \end{aligned} \tag{15}$$

Un problema planteado sobre un modelo matemático también puede ser representado por un grafo bicromático no orientado. Para obtener este grafo se toma el grafo modelo, y se le transforma del modo siguiente: Todos los vértices de entrada E se eliminan, incluyendo las aristas asociadas a ellos. Como resultado de la transformación mencionada, se obtiene el *grafo del problema.*

4. Solubilidad de un problema

Todo problema planteado sobre un modelo matemático se caracteriza por un *número de grados de libertad*, definido por la expresión

$$L(P) = |X| - |F(X)| \tag{16}$$

Se considera que el problema es compatible si

$$L(P) \geq 0 \tag{17}$$

Se considera que el problema está determinado si

$$L(P) = 0 \tag{18}$$

Los problemas determinados, que evidentemente siempre son compatibles, también se denominan *problemas de simulación*.

Para resolver un problema de simulación se determinan los *pareos perfectos* [3] entre los conjuntos X y $F(X)$. Si el problema tiene *solución cerrada*, hay uno o más pareos perfectos. Si el problema tiene *solución abierta*, habrá por lo menos dos pareos perfectos.

Un *algoritmo* que resuelve un problema de simulación con solución cerrada se puede obtener sustituyendo cada arista de uno de los pareos perfectos por un arco orientado de la relación a la incógnita, sustituyendo luego las aristas restantes por arcos que parten de las incógnitas.

Este algoritmo quedará entonces representado por un grafo bicromático orientado *acíclico*. Los algoritmos, correspondientes a otros pareos perfectos que puedan existir, también serán acíclicos, y llevarán en principio a la misma solución, aunque por caminos diferentes.

Un algoritmo que resuelve un problema de simulación con solución abierta se obtiene por el procedimiento explicado, a partir de un pareo perfecto, pero su estructura quedará representada por un grafo bicromático orientado *cíclico y convergente*. Otros algoritmos cíclicos, correspondientes a otros pareos perfectos del mismo problema, pero que sean *divergentes*, serán inútiles.

Los problemas compatibles pero indeterminados pueden reducirse a *problemas de optimización* si se introduce un criterio de optimización

$$J(Y) \rightarrow \text{extr} \tag{19}$$

donde

$$\begin{aligned} &Y \subseteq X \\ &|Y| = L(P) \end{aligned} \tag{20}$$

Los problemas incompatibles también pueden reducirse a *problemas de optimización* si en el modelo matemático se incluye un número – $L(P)$ de variables adicionales, llamadas *variables de error*, y las mismas se hacen argumentos de un criterio de optimización.

5. Un ejemplo de Mecánica

Sea una escalera de mano apoyada tanto en el piso como en la pared, según se ilustra en la Fig. 1. En la propia figura se muestran el peso **G** de la escalera, las fuerzas normales $\mathbf{N_1}$ y $\mathbf{N_2}$ y las fuerzas de fricción $\mathbf{f_1}$ y $\mathbf{f_2}$ ejercidas por la pared y el piso sobre la escalera.

Si se conocen el peso de la escalera y los coeficientes de fricción μ_1 y μ_2 entre la escalera y la pared y la escalera y el piso, respectivamente, determinar el ángulo máximo de inclinación α de la escalera respecto a la vertical.

El modelo matemático del equilibrio estático de la escalera está constituido por el sistema de relaciones (21).

El sistema de relaciones (21) se puede representar por el grafo modelo dado en la Fig. 2.

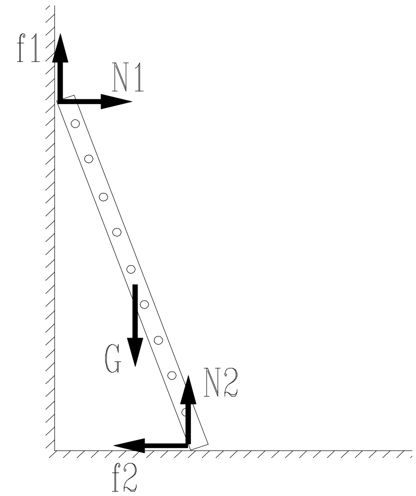

Fig. 1 Fuerzas actuantes sobre una escalera de mano.

$$\begin{aligned} &\mathrm{r}_1: \quad N_1 - f_2 = 0 \\ &\mathrm{r}_2: \quad N_2 + f_1 - G = 0 \\ &\mathrm{r}_3: \quad \left(N_2 - \frac{G}{2}\right)\mathrm{tg}\,\alpha - f_2 = 0 \\ &\mathrm{r}_4: \quad f_2 - \mu_2 N_2 = 0 \\ &\mathrm{r}_5: \quad f_1 - \mu_1 N_1 = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

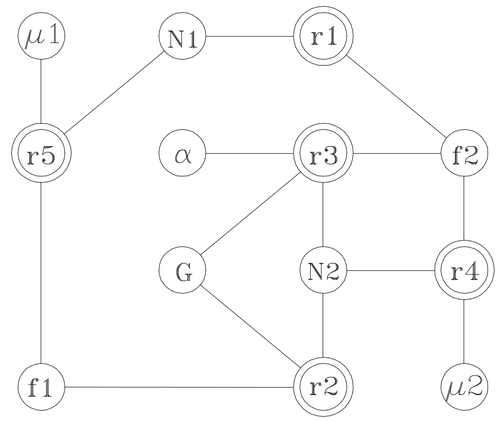

Fig. 2 Grafo representativo del modelo matemático (21).

Sobre el modelo matemático (21) se ha planteado un problema, que puede expresarse por los conjuntos de variables de entrada y salida siguientes:

$$\begin{aligned} E &= \{G, \mu_1, \mu_2\} \\ S &= \{\alpha\} \end{aligned} \tag{22}$$

El grafo del problema (22) se da en la Fig. 3. Este grafo se obtiene transformando el grafo del modelo, según el procedimiento explicado anteriormente.

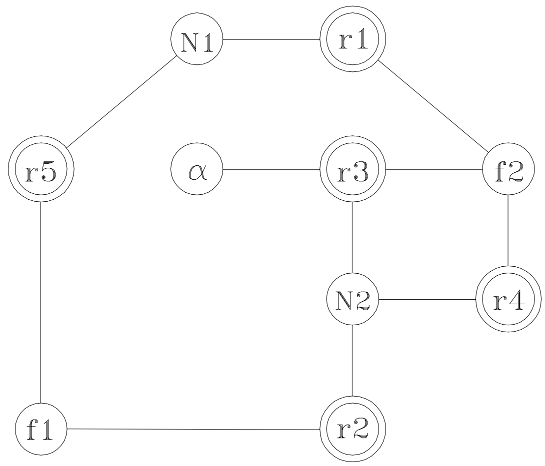

Fig. 3 Grafo representativo del problema (22), planteado sobre el modelo matemático (21).

El conjunto de las incógnitas del problema será

$$X = \{f_1, f_2, N_1, N_2, \alpha\} \tag{23}$$

Y el conjunto de las relaciones entre las incógnitas del problema

$$F(X) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\} \tag{24}$$

El número de grados de libertad del problema es

$$L(P) = |X| - |F(X)| = 0 \tag{25}$$

El problema es determinado, por lo cual constituye un problema de simulación. Existen dos pareos perfectos entre las relaciones y las incógnitas del problema (22). Uno de tales pareos perfectos se representa en la Fig. 4.

Considerando que cada una de las variables incógnitas es ahora una variable conocida, se sustituyen las aristas restantes en el grafo del pareo perfecto por arcos que salen de las variables respectivas.

De ese modo, el grafo de cada uno de los dos pareos perfectos da lugar a un grafo que representa la estructura de un algoritmo.

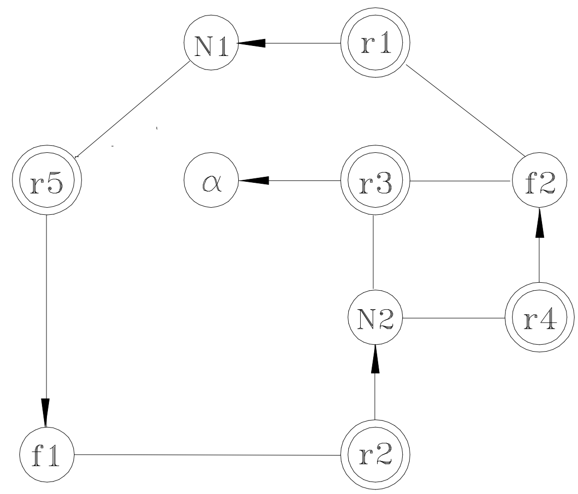

Fig. 4 Uno de los dos pareos perfectos entre las relaciones e incógnitas del problema (22).

El algoritmo correspondiente al pareo perfecto de la Fig. 4 se da en la Fig. 5. Puede demostrarse que este algoritmo es convergente, para cualquier inicialización.

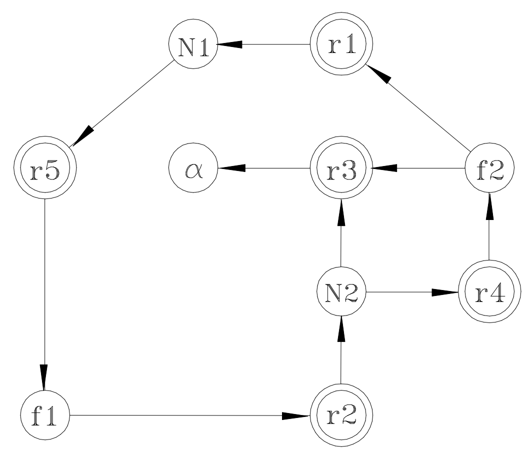

Fig. 5 Grafo del algoritmo que soluciona el problema (22), planteado sobre el modelo matemático (21).

Por otro lado, el algoritmo correspondiente al otro pareo perfecto es divergente, para cualquier inicialización, salvo el valor exacto de la solución.

El algoritmo obtenido es cíclico, y por tanto requiere de una inicialización. Esto implica que el primer paso p_1 del algoritmo es un subproblema incompleto, una situación, donde se le da a la variable N_2 su valor inicial. Simbólicamente,

$$p_1 \equiv \langle -, \{N_2\} \rangle \tag{26}$$

El segundo paso del algoritmo, como se observa en la Fig. 5, consiste en determinar la variable f_2 en la relación r_4. O sea,

$$p_2 \equiv \langle \{r_4\}, \{f_2\} \rangle \tag{27}$$

Los restantes pasos del algoritmo serán, siempre según la Fig. 5:

$$p_3 \equiv \langle \{r_3\}, \{\alpha\} \rangle \tag{28}$$

$$p_4 \equiv \langle \{r_1\}, \{N_1\} \rangle \tag{29}$$

$$p_5 \equiv \langle \{r_5\}, \{f_1\} \rangle \tag{30}$$

$$p_6 \equiv \langle \{r_2\}, \{N_2\} \rangle \tag{31}$$

Los pasos p_2 a p_6 se repiten hasta que el valor de N_2 converja a una magnitud fija. Entonces, el valor de α será el correcto.

Para los datos numéricos siguientes: G =1 000 N, $\mu_1 = 0.15$ y $\mu_2 = 0.20$ los cálculos numéricos arrojan los resultados recogidos en la Tabla 1.

Tabla 1. Ejemplo numérico

iteración	N_2 , [N]	α , [...°]
0	1 000	21.8
1	970	22.4
2	971	22.4
3	971	

6. Conclusiones y recomendaciones

La construcción sucesiva de los grafos del modelo, del problema y del algoritmo permite esclarecer la génesis del algoritmo.

Los algoritmos cíclicos resultan de difícil comprensión, pero muchos de los procedimientos de diseño mecánico presentan este carácter.

El ejemplo “sencillo” de la escalera dado en el presente artículo no aparece en los textos de Mecánica para Ingenieros, porque involucra un algoritmo cíclico.

Según la experiencia de los autores, cuando se utilizan los grafos bicromáticos como medio de representación de los modelos, problemas y algoritmos, los propios ingenieros diseñadores se motivan por realizar ellos mismos el proceso de desarrollo, con lo cual alcanzan tanto las habilidades para el análisis como para la síntesis.

Por tanto, se recomiendan los grafos bicromáticos como herramienta para la representación de los algoritmos en las monografías, artículos de publicaciones periódicas y en todos los documentos de proyecto donde se expresen algoritmos.

Por otro lado, se ha demostrado en la práctica el alto valor de los grafos bicromáticos como herramienta pedagógica para la formación algorítmica [5] de los estudiantes de ingeniería, en posgrado y en pregrado.

Por ello, se recomiendan los grafos bicromáticos para representar la génesis de algoritmos en los libros de texto, así como en las conferencias, clases prácticas, laboratorios y demás actividades docentes.

Bibliografía

1 ILLINGWORTH V., GLEYSER E.L., PAYLE I.K. (Eds.) *Dictionary of Computing*. Oxford University Press, Oxford, 1986.

2 LOPATNIKOV L.I. *Èkonomiko-matematiceskij slovar'*. Nauka, Moskva, 1987.

3 ORE O. *Theory of Graphs*. American Mathematical Society, Rhode Island, 1962.

4 TYUGU È.H. Rešenie zadac na vycislitel'nyh modelâh. *Vycislitel'naâ matematica i matematicescaâ fizika.* **10** (1970), N° 3, 716-733.

5 ESCANAVERINO J.M. Los grafos bicromáticos: una herramienta en la formación algorítmica de los estudiantes de ingeniería. *Evento Pegagogía'97*. La Habana, Cuba, 3-7 febrero 1977.

—

Algorithmics of mechanical design

Abstract

It is shown that every mechanical engineering design procedure can be interpreted as a problem solving process in mathematical models, by means of the corresponding algorithms. Dichromatic graphs are used as means to express models, problems and algorithms. Theoretical concepts are illustrated with a practical example taken from solid mechanics.