

# Obtención de la característica geométrica a la torsión de perfiles delgados cerrados multiconexos

## Obtaining geometric characteristic to torsion in multiply connected thin-walled closed profiles

**Carlos-Eulalio Novo-Soto, Iván Pérez-Mallea**

Universidad de las Ciencias Informáticas. La Habana, Cuba.

Correo electrónico: [novo@uci.cu](mailto:novo@uci.cu)

Recibido: 14 de marzo de 2014

Aceptado: 30 de junio de 2014

---

### Resumen

En el presente trabajo se dedujeron y obtuvieron las expresiones que permiten determinar la característica geométrica de una barra de perfil delgado cerrado multiconexa, uniforme a lo largo de su eje, sometida a torsión, adicionalmente se obtuvo la aplicación de las expresiones para la obtención de la característica geométrica a la torsión a través de dos ejemplos, uno donde los tabiques que conforman la sección transversal de la barra son de espesores uniformes y el otro con espesores variables, ambos se desarrollaron a través de la metodología establecida en el trabajo para el cálculo de esta característica geométrica.

**Palabras claves:** característica geométrica, torsión, perfiles cerrados multiconexos.

### Abstract

In this paper we derive and disclose the expressions for determining the geometric characteristic of a closed bar multiply connected profile, uniform along its axis, subjected to torsion, further application of the expressions shown for obtain the geometric feature to the torque through two examples, one where the partitions that form the cross section of the bar is of uniform thickness and the other with varying thicknesses, both examples are developed through methodical work established for calculating this geometric feature.

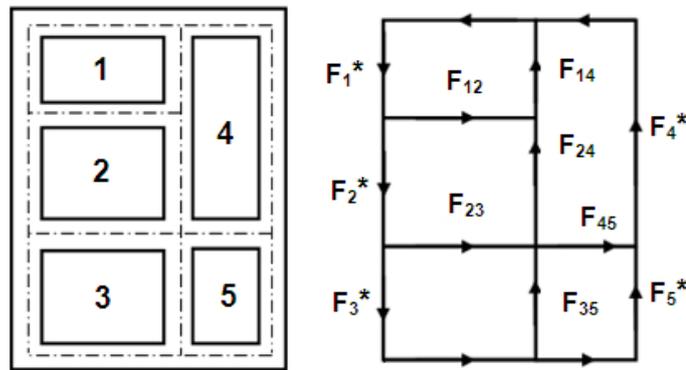
**Key words:** geometric characteristic, torsion, multiply connected closed profiles.

## Introducción

Las actuales posibilidades en el desarrollo de la computación [1-3], tanto en los programas de cómputo[4], como en la tecnología, han posibilitado que los no especialistas en la materia sean capaces de simular cuerpos, someterlos a cargas y determinar las tensiones y desplazamientos [5] que se generan en el sólido.

Por otro lado el desconocimiento de los fundamentos para la obtención de las características geométricas de las secciones transversales de las barras sometidas a torsión y las facilidades que brindan los programas de elementos finitos para el cálculo [6] y selección de las características geométricas de las secciones transversales para elementos lineales estructurales provocan sensibles errores por parte de los profesionales en la determinación de las tensiones en cuerpos sometidos a torsión.

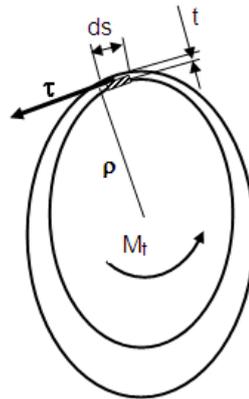
Es objetivo del presente trabajo dar a conocer las expresiones y ejemplificar el método de cálculo que permiten obtener la característica geométrica a la torsión de elementos lineales con perfiles delgados cerrados multiconexos, como se muestra en la figura 1, donde se observa que el perfil está constituido por cinco celdas y se indican los sentidos de los flujos tangenciales  $F$  a lo largo de las paredes que conforman el perfil.



**Fig. 1.** Característica geométrica de los perfiles delgados cerrados multiconexos y dirección de los flujos tangenciales

## Desarrollo

Seguidamente se deducirán las expresiones que permiten obtener la característica geométrica a la torsión de perfiles delgados cerrados multiconexos.



**Fig. 2.** Esfuerzo tangencial en un elemento diferencial de un perfil de pared delgada cerrado sometido a torsión

Como se conoce de la Resistencia de Materiales [7] y se puede observar en la figura 2 el momento torsor generado en la sección transversal de un perfil de pared delgado cerrado viene expresado por:

$$M_t = \oint \tau t ds \rho = \oint F \rho ds = 2FA^*$$

Donde:  $M_t$ : Momento torsor

$T$ : Esfuerzo tangencial

$t$ : Espesor de pared

$ds$ : Diferencial de perímetro

$\rho$ : Radio vector que define la posición del elemento diferencial  $\tau$

Se define el flujo tangencial como el producto del esfuerzo tangencial por el espesor, ecuación 1

$$F = \tau t \quad (1)$$

De tal forma que en presencia de un perfil delgado cerrado compuesto por  $i$  celdas el momento torsor resultante viene dado por la expresión ecuación 2:

$$M_t = 2 \sum_{i=1}^n A_i^* F_i^* \quad (2)$$

Siendo:

$F_i^*$ : Flujo tangencial correspondiente

$A_i^*$ : Área dentro de la línea media de la celda

El flujo entre celdas contiguas, ecuación 3

$$F_{ij} = F_i^* - F_j^* \quad (3)$$

Donde  $i, j$  identifican dos celdas contiguas,  $F_{ij}$  será positivo si va en el sentido de  $F_i^*$

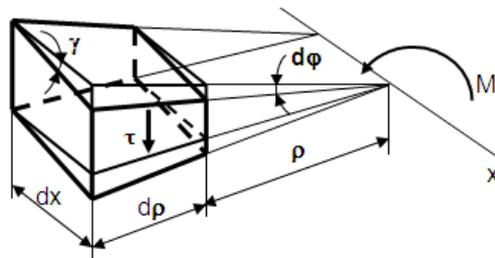
En la figura 3, correspondiente a un elemento diferencial sometido a la acción de los esfuerzos tangenciales provocados por la torsión [8], se observa que existe un arco común que suspende a los ángulos  $\gamma$  y  $d\phi$ , por lo que se cumplirá la relación:

$$\gamma dx = (\rho + d\rho) d\phi$$

Donde

$\gamma$ : Distorsión o deformación angular unitaria

$d\phi$ : Diferencial de ángulo de giro



**Fig. 3.** Deformación de un elemento diferencial de un sólido sometido a torsión

Despreciando los diferenciales de segundo orden se obtiene

$$\gamma dx = \rho d\phi$$

Despejando la distorsión angular  $\gamma$  se tendrá:

$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx} = \rho \theta$$

Siendo  $\theta$ : el ángulo de giro unitario

Por lo que

$$\oint_j \gamma ds = \oint \rho \theta ds = 2\theta A_i^* \quad (4)$$

Por otro lado se sabe que ecuación 5

$$\tau = G\gamma = \frac{F}{t} \tag{5}$$

Donde G: Módulo de distorsión

Despejando la distorsión  $\gamma$  en la ecuación 5 y sustituyendo en la ecuación 4 se obtiene la ecuación 6:

$$\oint_i \frac{F}{t} ds = 2G\theta A_i^* \tag{6}$$

Haciendo, ecuación 7

$$\int_{(i,j)} \frac{ds}{t} = \lambda_{ij} = \lambda_{ji} \tag{7}$$

Considerando que para todas las combinaciones donde i,j no son contiguas  $A_{ij}=0$

Por lo tanto sustituyendo la ecuación 7 en la ecuación 6 se obtiene la ecuación 8

$$\sum_j \lambda_{ij} F_{ij} = 2G\theta A_i^* \tag{8}$$

Teniendo en cuenta la ecuación 3

$$F_i^* \sum_j \lambda_{ij} - \sum_j F_j^* \lambda_{ij} = 2G\theta A_i^* \tag{9}$$

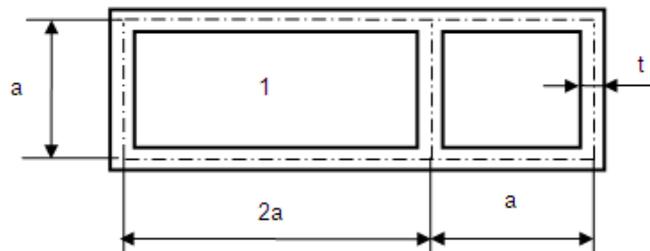
Por lo que para n flujos

$$\lambda_i F_i^* - \sum_j \lambda_{ij} F_j^* = 2G\theta A_i^* \tag{10}$$

siendo  $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Esta última resulta ser la expresión fundamental [9-10] que posibilita la determinación de la característica geométrica a la torsión de perfiles delgados cerrados multiconexos.

Para facilitar la aplicación de las expresiones a continuación se ejemplificará el procedimiento empleando una sección transversal con perfil uniforme (ver Fig. 4) y otra con perfil de espesor variable (ver Fig. 5) para brindar la mayor generalidad posible.



**Fig. 4.** Ejemplo de perfil delgado cerrado multiconexo con tabiques uniformes

Una vez definida la línea media de las celdas que conforman el perfil se pasa a obtener las áreas  $A_i$  de cada celda, así como la relación perímetro espesor  $\lambda_i$  y la relación perímetro espesor  $\lambda_{ij}$  correspondiente a los tabiques comunes a celdas contiguas.

Así se determinan los parámetros planteados para el perfil mostrado constituido por dos celdas y un tabique común

$$A_1 = 2a^2 \lambda_1 = \frac{6a}{t} \quad \lambda_{12} = \frac{a}{t} \quad A_2 = a^2 \lambda_2 = \frac{4a}{t}$$

Estos parámetros se introducen en la expresión fundamental para el cálculo de la característica geométrica a la torsión:

$$\lambda_i F_i^* - \sum_j \lambda_{ij} F_j^* = 2G\theta A_i^*$$

Teniendo en cuenta las celdas en el orden 1-2

Para 1-2  $i=1$   $j=2$

La expresión fundamental (10) adopta la forma

$$\lambda_1 F_1^* - \lambda_{12} F_2^* = 2G\theta A_1^*$$

Simplificando: ecuación 11

$$6F_1^* - F_2^* = 4G\theta a t$$

Sustituyendo los parámetros correspondientes:

$$\frac{6a}{t} F_1^* - \frac{a}{t} F_2^* = 2G\theta 2a^2$$

(11)

Para las celdas en el orden 2-1

Para 2-1  $i=2$   $j=1$

La expresión fundamental (10) tomará la forma

$$\lambda_2 F_2^* - \lambda_{21} F_1^* = 2G\theta A_2^*$$

Sustituyendo los valores correspondientes:

$$\frac{4a}{t} F_2^* - \frac{a}{t} F_1^* = 2G\theta a^2$$

Simplificando se obtiene la ecuación 12

$$4F_2^* - F_1^* = 2G\theta a t$$

(12)

Resolviendo el sistema de ecuaciones 11 y 12

Se obtiene las ecuaciones 13 y 14

$$F_1^* = \frac{18}{23} G\theta a t$$

(13)

$$F_2^* = \frac{16}{23} G\theta a t$$

(14)

Sustituyendo  $A_1$  y  $A_2$  en la ecuación 2 se tendrá la ecuación 15

$$M_t = 2[2a^2 F_1^* + a^2 F_2^*] = G\theta I_t$$

(15)

Sustituyendo 13 y 14 en la ecuación 15 y despejando la característica geométrica a la torsión,  $I_t$

$$I_t = \frac{104}{23} a^3 t$$

Para el caso de una sección transversal de espesor no uniforme como se muestra a continuación en la figura 5

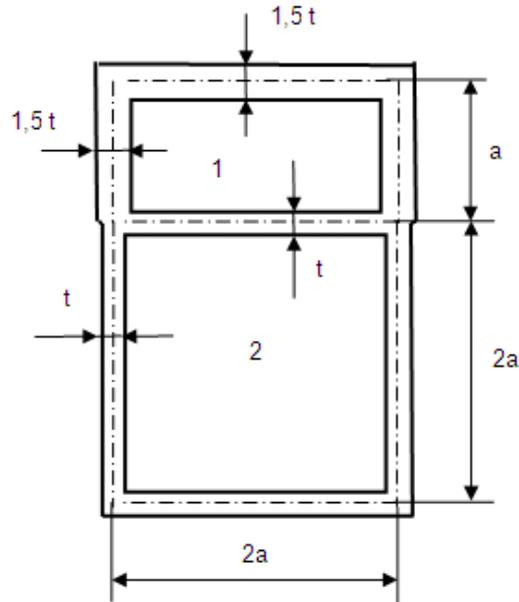


Fig. 5. Ejemplo de perfil delgado cerrado multiconexo con tabiques no uniformes

$$A_1=2a^2\lambda_1=\frac{a+a}{1,5t}+\frac{2a}{1,5t}+\frac{2a}{t}=\frac{7a}{1,5t} \quad \lambda_{12}=\frac{2a}{t} \quad A_2=4a^2\lambda_2=\frac{8a}{t} \quad \lambda_i F_i^* - \sum_j \lambda_{ij} F_j^* = 2G\theta A_i^*$$

Para 1-2    i=1    j=2

$$\frac{7a}{1,5t}F_1^* - \frac{2a}{t}F_2^* = 2G\theta 2a^2$$

$$7F_1^* - 3F_2^* = 6G\theta at \tag{16}$$

Para 2-1    i=2    j=1

$$\frac{8a}{t}F_2^* - \frac{2a}{t}F_1^* = 2G\theta 4a^2$$

$$8F_2^* - 2F_1^* = 8G\theta at \tag{17}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 16 y 17

Se obtienen las ecuaciones 18 y 19

$$F_1^* = \frac{12}{25}G\theta at \tag{18}$$

$$F_2^* = \frac{28}{25}G\theta at \tag{19}$$

Sustituyendo  $A_1$  y  $A_2$  en la ecuación 2 se obtendrá la ecuación 20

$$M_t = 2 \left[ 2a^2 F_1^* + 4a^2 F_2^* \right] = G\theta I_t \tag{20}$$

Sustituyendo 18 y 19 en la ecuación 20 y despejando la característica geométrica a la torsión,  $I_t$

$$M_t = 2 \left[ 2a^2 F_1^* + 4a^2 F_2^* \right] = G\theta I_t \tag{21}$$

$$I_t = \frac{272}{25}a^3t \tag{22}$$

Como se muestra en la solución de los ejemplos mostrados para facilitar la determinación de los parámetros que aparecen en la expresión fundamental 10 es conveniente comenzar por definir las celdas que componen la sección transversal del perfil, así como sus líneas medias, seguidamente obtener las áreas de las celdas y delimitando los tabiques determinar por la línea media la relación perímetro espesor

## Conclusiones

Simultaneando la expresión fundamental 10 con la ecuación 2 y sabiendo la relación que existe entre el momento torsor y la característica geométrica a la torsión se determina la magnitud de esta última.

La solución de los ejemplos seleccionados evidencia la importancia de iniciar la determinación de la característica geométrica a la torsión con la definición de las líneas medias de las celdas para seguidamente calcular las áreas y las correspondientes relaciones de perímetros espesores de cada tabique.

## Referencias

1. Chennakesava, R. *Alavala: Finite Method: Basic Concepts and Applications*. New Delhi, India PHI-Learning Pvt. Ltd, 2009. Vol. 408, p. 63-66. ISBN 978-8120335844.
2. Edward Akin, J. *Finite Element Analysis Concepts*. New Jersey, USA: World Scientific, 2010. Vol. 335, p. 27-28. ISBN 978-9814313018.
3. Beer, G., Wsmith, L. y Duenser, C. *The Boundary Element Method with Programming for Engineers and Scientists*. Wien, New York: Springer, 2010. Vol. 508, p. 31-32, 76-81. ISBN 978-3211715765.
4. Khennane, A. *Introduction to Finite Element Analysis Using Matlab and Abaqus*. Florida, USA: CRC Press, 2013. Vol. 487, p. 5-7. ISBN 978-1466580206.
5. Oñate Ibáñez De Navarra, E. *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos*. Barcelona, España: Artes Gráficas Torres, S.A. 1992. Vol. 838, p. 21-26. ISBN 978-8487867002.
6. Öschner, A. y Merkel, M. *One-Dimensional Finite Element: An Introduction to the FE Method*. New York, USA: 2012. Vol. 398, p. 51-54 ISBN 978-3642317965.
7. Pisarenko, G. S., Yákovlev, A. P. y Matvéev, V. V. *Manual de resistencia de materiales*. Moscú: MIR, 1985. Vol. 693, p. 215-218.
8. Feodosiev, V. I. *Resistencia de Materiales*. Moscú: MIR, 1997. Vol. 579, p. 81-90. ISBN 978-5884170346.
9. Neuber, H. *Mecánica Técnica, Elastostática y Teoría de la Resistencia de Materiales, tomo II*. Madrid, España: DOSSAT, S. A, 1977. Vol. 392, p. 307-311. ISBN 978-8423703657.
10. Beer, F. P., Johnston, E., Russell, J., et al. *Mechanics of Materials*. USA: McGraw-Hill, 2010. p. 189-191. ISBN 9780071284226.