

Algunas consideraciones sobre el efecto del espesor de llanta en la resistencia a la fractura de ruedas dentadas

G. González-Rey

Recibido el 18 de marzo del 2008, aceptado el 24 de julio del 2008

Resumen

En transmisiones por engranajes, con ruedas de llantas delgadas trabajando en régimen de carga nominal y con suficiente resistencia a los esfuerzos de flexión en la raíz de los dientes, ha sido observado el surgimiento de grietas por debajo de los dientes que se propagan a través de la llanta con rotura por fractura de la rueda dentada. Las actuales formulaciones de las Normas ISO y AGMA para valorar el esfuerzo máximo resultante en la base de los dientes de las ruedas de engranajes cilíndricos introducen factores modificadores de los esfuerzos (Y_B y K_B) para ruedas dentadas con llantas de pequeño espesor. Estudios realizados valoran de forma diferente el factor por adelgazamiento de llanta en dependencia de la geometría de las ruedas y la rigidez conjunta entre llanta y los nervios soporte del núcleo de la rueda dentada. En el presente artículo, se expone un breve resumen del estado del arte sobre el tema, son mostrados y confirma dos resultados derivados de un análisis de la interrelación entre el factor por adelgazamiento de llanta, la razón de espesor relativo de la llanta y la razón de espesor relativo de los nervios del soporte en ruedas dentadas cilíndricas, y otros asociados con la tendencia del límite inferior de la razón de espesor relativo de la llanta en dependencia del número de dientes de la rueda.

Palabras claves: rueda de llanta fina, engranaje, espesor de llanta, fractura, factor modificador de esfuerzo.

Some considerations about the effect of the rim thickness on gear fracture resistance.

Abstract

In thin rimmed gears running with nominal load and sufficient bending stress resistance at the tooth-root, fatigue cracks with propagation through the rims, rather than at the tooth fillet, has been observed. Both the ISO and AGMA standards introduce stress-modifying factors (denominated rim thickness factors Y_B and K_B) for the bending stress calculation where the rim thickness is not sufficient to provide full support of the tooth root. However, some different behavior of rim thickness factor depending on gear geometry and the stiffness of both rim and web thickness have been reported. In this paper, some studies published about the effects of rim thickness on spur gear bending stress are reviewed. Moreover, the influence in the rim thickness factor of both rim backup ratio and web thickness ration is confirmed based on statistical analysis and a technical report [17]. Finally, the effect of the number of teeth in the lowest rim backup ratio limit at which thin rim gear stresses equal solid gear stresses is confirmed.

Key words: gear, thin rim gears, rim thickness, fatigue cracks, rim thickness factor

1. Introducción.

Como es conocido, la capacidad de trabajo de un engranaje se caracteriza por su resistencia mecánica a los esfuerzos producidos por las cargas actuantes. Para la verificación de la capacidad de carga de los engranajes cilíndricos han sido dos los criterios más difundidos y estudiados:

*resistencia a los esfuerzos de contacto y
resistencia a las tensiones en la base del diente,*

los cuales han servido de base a diversas normas de comprobación de este tipo de engranaje.

El criterio de resistencia a los esfuerzos de contacto analiza la capacidad de trabajo de los flancos activos de los dientes considerando que no ocurra un deterioro por fatiga superficial (picadura) antes de un plazo de tiempo previsto. En cambio, el criterio de resistencia a los esfuerzos en la base (fondo) del diente verifica que no ocurra la fractura a través de los dientes por fatiga volumétrica y pueda ser cumplido el plazo de tiempo esperado para el servicio en explotación.

La ingeniería de engranajes ha planteado como una de sus principales prioridades el desarrollo de mejores modelos para el análisis de la capacidad de trabajo de las ruedas dentadas. La mayoría de los modelos aceptados toman en consideración la resistencia a la fractura de los dientes en su base ante un régimen nominal de cargas y aceptando un convencional desarrollo de la grieta de fractura por fatiga a través del pie del diente, según se observa en la figura 1.

Usualmente, la fractura por fatiga de los dientes en su base puede ser evitada en ruedas dentadas de engranajes diseñadas apropiadamente. Sin embargo, en ocasiones el fallo por fractura puede ocurrir, aún cuando el diseño de las ruedas esté en correspondencia con las normas convencionalmente aceptadas para este propósito.

Las aplicaciones prácticas de la ingeniería de engranaje han demostrado que la fractura de los dientes de las ruedas puede ocurrir de formas diversas y en dependencia de factores disímiles, algunos de los cuales se muestran en las Figuras 2 y 3.

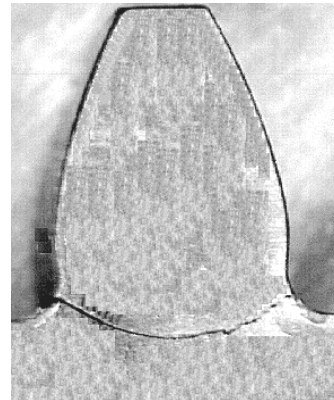


Figura 1. Orientación de la propagación normal de la grieta de fractura en diente de rueda con espesor suficiente del material bajo los dientes.

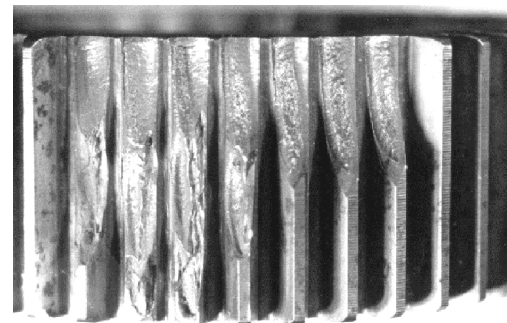


Figura 2. Fractura de dientes en rueda dentada por mala distribución de la carga en los flancos de los dientes [1].



Figura 3. Dientes fracturados por grieta generada a lo largo del límite de la zona efectiva de cementado y provocada por escasa resistencia a la fatiga del material ante la carga aplicada [1].

Particularmente, y es objeto de estudio del presente trabajo, el fallo por fractura de la llanta puede ocurrir debido a un insuficiente espesor del material bajo los dientes.

En el caso de ruedas dentadas con pequeño espesor del metal bajo los dientes, conocidas como ruedas con llantas delgadas, pueden surgir

por debajo de los dientes grietas que se propagan en dirección radial y producir una rotura catastrófica por fractura de la llanta. Un ejemplo de este caso, se muestra en la Figura 4 para una rueda cilíndrica con dientes rectos.

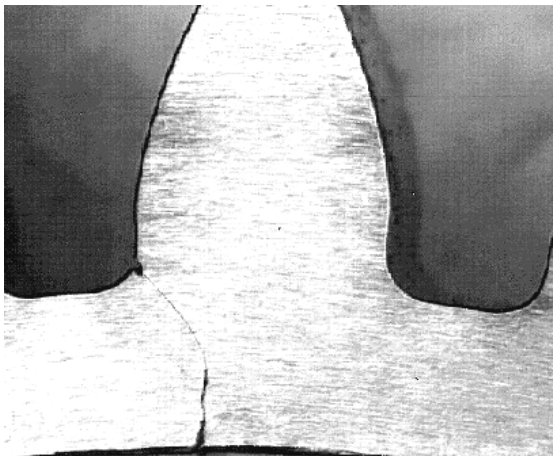


Figura 4. Propagación de la grieta de fractura por la llanta de una rueda con espesor insuficiente del material bajo los dientes [2].

En situaciones como la mostrada en la figura 4, se debe valorar la resistencia considerando esfuerzos en la zona de la llanta superiores al esfuerzo resultante mayor que ocurre sobre la curva de empalme en el pie del diente de una rueda con suficiente espesor del metal bajo los dientes. Es en este sentido, que fue introducido en las fórmulas para valorar la resistencia a la fractura de los dientes, según AGMA (en 1988) e ISO (en 1989), un factor de corrección de esfuerzos que tomará en consideración la influencia del espesor de la llanta en la resistencia a la fractura de las ruedas.

A pesar de ser conocido, que el empleo de ruedas con llantas delgadas disminuye la resistencia a la fractura catastrófica de las ruedas de engranaje, el autor ha presenciado ocasionalmente diseños de transmisiones por engranajes en vehículos automotores, con exigencias de reducción del peso y volumen, donde ha ocurrido la fractura de la llanta de las ruedas dentadas (ver Figura 5), a pesar que las dimensiones y resistencia de los materiales de los dientes eran suficientes para transmitir la carga exigida en el régimen nominal de explotación [3].



Figura 5. Clásica fractura de rueda cónica por insuficiente espesor de llanta para soportar las cargas de trabajo. Notar que la grieta no crece a lo largo de la base del diente.

2. Resistencia a la fractura por fatiga en engranajes cilíndricos.

Uno de los primeros modelos conocidos y base de las actuales normas ANSI-AGMA (normas estadounidenses para engranajes) fue propuesto por *Wilfred Lewis* [5] en 1892 y suponía un par de dientes resistiendo una fuerza aplicada en la cresta del diente. En este modelo, la fuerza orientada sobre la línea de presión se aplica en un punto interior del diente sobre su eje de simetría y en el extremo superior del contorno de una supuesta viga en voladizo equi-resistente de forma parabólica (ver Figura 6), cuya base tiene el mismo ancho que la base del diente y corresponde con el ancho crítico que soporta el mayor esfuerzo resultante en el diente debido a la fuerza normal aplicada que se genera del contacto de los dientes y debido a la transmisión de potencia en el engranaje.

Posterior a los trabajos de *Lewis*, la introducción de mejoras de los procedimientos de cálculo y los modelos de análisis han sido objetivos fundamentales de numerosas investigaciones en la ingeniería de engranajes. Referencia de tal afirmación es la propia evolución de las Norma ISO 6336-3:1996 [4] que fue derivando desde la primera propuesta emitida en el Comité Técnico ISO de Engranaje (ISO/TC60), con la consideración de un esfuerzo equivalente en el fondo del diente a partir de una carga en la cresta del diente y la determinación de la zona crítica mediante tangentes a 30° (ver Figura 6), hasta las actuales

propuestas de modelo con una carga en el diente aplicada en la zona que inicia el contacto un solo par de diente en la línea práctica de engranaje y una muy bien definida concentración de la carga en el fondo del diente producto del tallado por generación.

También son destacables las mejoras introducidas en la Norma AGMA 2101-D04 [6] con precisiones en las zonas de aplicación de la carga, los valores del esfuerzo límite por fatiga de los materiales para ruedas dentadas sometidas a grandes números de ciclos de carga y con consideraciones de la influencia de la temperatura en la resistencia de los dientes de acero.

En la actualidad y derivado de resultados de análisis de la convergencia de modelos teóricos con ensayos prácticos y pruebas de campo, las Normas ISO 6336-3 y AGMA 2101 poseen los sistemas de ecuaciones y recomendaciones más aceptados para el cálculo de los esfuerzos en la base de los dientes de las ruedas dentadas de engranajes cilíndricos.

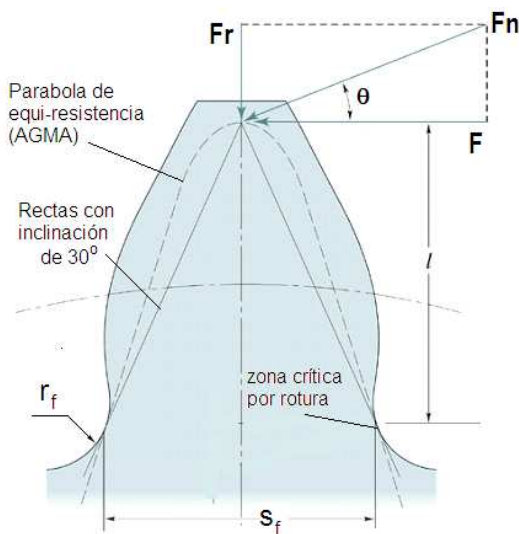


Figura 6. Modelos de cálculo de los esfuerzos en el fondo del diente, considerando una fuerza aplicada en la cresta del diente y la determinación del ancho de la zona crítica por rotura según los criterios de AGMA (parábola de equi-resistencia) e ISO (rectas a 30°)

La ingeniería de engranaje y sus estudios teóricos-prácticos no han estado ajenos a la actual difusión del Método de los Elementos Finitos (MEF). En este sentido, publicaciones referidas a la

implementación del MEF en el estudio de los engranajes demuestran la alternativa de este método como herramienta potencial para el estudio de los esfuerzos en la base de los dientes de las ruedas dentadas de los sistemas de engranajes [7], [8], [9], [10]. Estos estudios han validado en buena medida las propuestas de cálculo de los esfuerzos según las Normas ISO 6336 y AGMA 2101.

El cálculo de los esfuerzos en la base del diente, según ISO 6336-3 y AGMA 2101, ha permitido desarrollar las ecuaciones necesarias para evaluar los esfuerzos en la raíz del diente y valorar la resistencia de una rueda dentada cilíndrica a la fractura de sus dientes en la base durante la transmisión del movimiento bajo carga mediante el contacto de los flancos activos de los dientes del engranaje.

Del análisis de los modelos de referencia e introduciendo factores teóricos y prácticos para considerar la influencia de concentradores de tensión en la base del diente, la distribución irregular de la carga en el engrane y la inclinación de los dientes, entre otros aspectos, ha sido posible la obtención de las fórmulas (1), (2), (3) y (4) para el cálculo de la resistencia de los esfuerzos en la base del diente según ISO 6336-3:1996 y AGMA 2101-D04 respectivamente

Según ISO 6336-3:1996:

Para evaluar en el piñón la resistencia a la fractura del diente en la base:

$$\sigma_{F1} = \frac{F_t}{b_1 \cdot m_n} \cdot Y_{F1} \cdot Y_{S1} \cdot Y_\varepsilon \cdot Y_\beta \cdot Y_{B1} \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha} \leq [\sigma_{F1}] \quad (1)$$

Para evaluar en la rueda la resistencia a la fractura del diente en la base:

$$\sigma_{F2} = \frac{F_t}{b_2 \cdot m_n} \cdot Y_{F2} \cdot Y_{S2} \cdot Y_\varepsilon \cdot Y_\beta \cdot Y_{B2} \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha} \leq [\sigma_{F2}] \quad (2)$$

Según AGMA 2101-D04:

Para evaluar en el piñón la resistencia a la fractura del diente en la base:

$$\sigma_{F1} = F_T \cdot K_0 \cdot K_V \cdot K_{S1} \cdot \frac{K_H \cdot K_{B1}}{b_1 \cdot m_T \cdot Y_{J1}} \leq [\sigma_{F1}] \quad (3)$$

Para evaluar en la rueda la resistencia a la fractura del diente en la base:

$$\sigma_{F2} = F_T \cdot K_0 \cdot K_V \cdot K_{S2} \cdot \frac{K_H \cdot K_{B2}}{b_2 \cdot m_T \cdot Y_{J2}} \leq [\sigma_{F2}] \quad (4)$$

Siendo:

σ_F : Esfuerzo resultante en diente del piñón (MPa).

σ_R : Esfuerzo resultante en diente de la rueda (MPa).

$[\sigma_{F1}]$: Esfuerzo permisible en diente del piñón (MPa).

$[\sigma_{F2}]$: Esfuerzo permisible en diente de la rueda (MPa).

F_t : Fuerza tangencial (N).

b_1 : Ancho del diente del piñón (mm).

b_2 : Ancho del diente de la rueda (mm).

m_n : Módulo normal del engranaje (mm).

m_t : Módulo transversal del engranaje (mm).

Y_ε : Factor por razón de contacto.

Y_β : Factor por ángulo de la hélice.

Y_{B1} , K_{B1} : Factor por adelgazamiento de llanta en piñón (ISO y AGMA).

Y_{B2} , K_{B2} : Factor por adelgazamiento de llanta en rueda (ISO y AGMA).

Y_{F1} : Factor de forma de los dientes del piñón.

Y_{F2} : Factor de forma de los dientes de la rueda.

Y_{S1} : Factor de concentración de tensiones en piñón.

Y_{S2} : Factor de concentración de tensiones rueda.

Y_{J1} : Factor geométrico de resistencia a flexión en piñón.

Y_{J2} : Factor geométrico de resistencia a flexión en rueda.

K_A , K_0 : Factor por aplicación de carga (ISO y AGMA).

K_V : Factor por carga dinámica interna.

$K_{F\beta}$: Factor de carga en el flanco del diente.

$K_{F\alpha}$: Factor de carga transversal.

K_H : Factor por distribución de carga.

K_{S1} : Factor por tamaño para piñón.

K_{S2} : Factor por tamaño para rueda.

La capacidad de resistencia a la fractura de los dientes en las ruedas de engranajes cilíndricos se establece cuando el máximo esfuerzo resultante en la dirección de la altura del diente, que generalmente ocurre sobre la curva de empalme en el pie del diente (ver Figura 7), no supera el esfuerzo permisible del material.

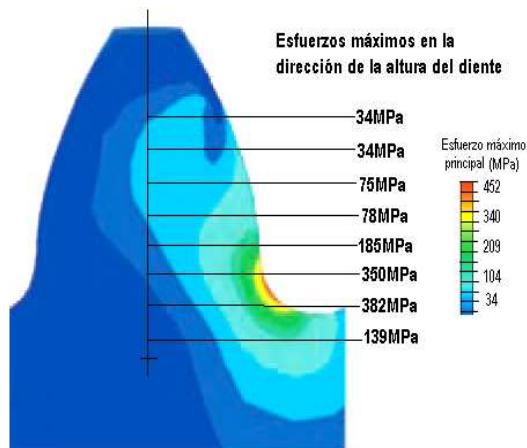


Figura 7. Zonas de iguales esfuerzos en la sección media de un diente con identificación de los esfuerzos máximos principales a diferentes alturas del diente. Observar el máximo esfuerzo de flexión en la curva de empalme en el pie del diente.

Como fue antes mencionado, en el caso de ruedas dentadas con pequeño espesor del metal bajo los dientes pueden surgir grietas por debajo de los dientes que se propagan en dirección radial hacia el centro de la rueda y producir una rotura por fractura de la llanta. Para considerar estos casos, en las fórmulas (1), (2), (3) y (4) de las normas ISO y AGMA han sido introducidos los factores Y_A y K_B por adelgazamiento de llanta.

3. Nociones sobre la propagación de la grieta de fractura a través de llantas de pequeño espesor en ruedas dentadas.

Como se ha dicho, las actuales formulaciones de las Normas ISO y AGMA para valorar el esfuerzo máximo resultante en la base de los dientes de las ruedas de engranajes cilíndricos introducen factores modificadores de los esfuerzos (Y_B y K_B) para considerar los casos de ruedas dentadas con llantas de pequeño espesor, donde se crean condiciones favorables para el surgimiento de grietas por debajo de los dientes y producir una rotura de la rueda por fractura de la llanta. Ambos factores Y_B y K_B tienen las mismas consideraciones y en la actualidad son igualmente valorados por las Normas ISO [4] y AGMA [6]. Frecuente en el diseño de engranajes es deseado disminuir el peso y las dimensiones de las ruedas.

Son varias las transmisiones de potencia mecánica donde estos requisitos son exigidos, como son los casos de las transmisiones de fuerza en vehículos automotores y aeroespaciales. Con el objetivo de garantizar ese propósito y aligerar el peso de los engranajes, a menudo las ruedas dentadas se fabrican de aceros de elevada resistencia mecánica, convenientemente tratadas mediante procesos térmico-químicos y con diseños en las formas que incluyen vaciados y llantas delgadas según se muestra en la figura 8.

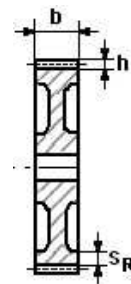


Figura 8. Rueda dentada con acotado de ancho de diente b , altura total de diente h y espesor de llanta S_R .

Desafortunadamente, las ruedas dentadas con grandes vaciados y llantas de poco espesor pueden tener una disminución de la resistencia a la fractura debido a que la grieta por fractura, que en normales condiciones crecería a lo largo de la base del diente en la dirección del máximo esfuerzo en la raíz del diente, ahora puede propagarse por debajo del diente y transversalmente a la llanta en la dirección del máximo esfuerzo y provocar un fallo catastrófico en el engranaje. La Figura 9 muestra el concepto antes expresado.

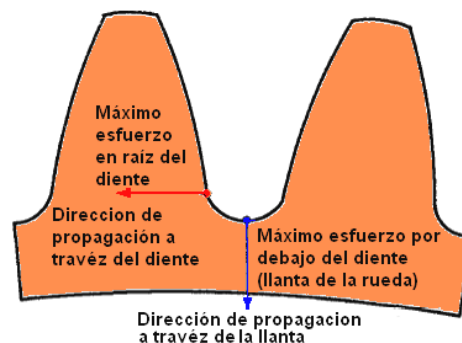


Figura 9. Orientaciones de las posibles direcciones de propagación de la grieta en la base de los dientes de una rueda de engranaje.

La Figura 10 muestra un comportamiento clásico de los esfuerzos en la raíz de un diente de una rueda motriz. Se observa que el máximo esfuerzo normal en la zona de tracción ocurre durante el engrane en la posición B y el máximo esfuerzo normal en la zona de compresión en la posición A antes de entrar en contacto en la línea práctica de engranaje.

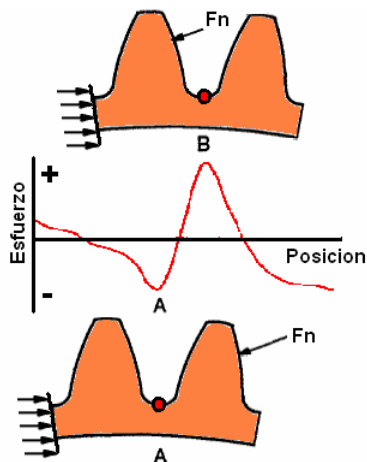


Figura 10. Posiciones para los esfuerzos normales máximos en la zona de tracción y en la zona de compresión en la raíz de los dientes.

Por otro lado, las fórmulas convencionales para evaluar los esfuerzos en la raíz del diente según Normas ISO y AGMA están orientadas para calcular el máximo esfuerzo normal en la zona de tracción en el diente y asumen nulo el esfuerzo en la zona de compresión (ver Figura 11). De esta forma es considerado el esfuerzo nominal del ciclo de carga como el máximo esfuerzo normal en la zona de tracción. La anterior consideración puede ser prácticamente aceptable en ruedas dentadas con espesor suficiente del material bajo los dientes, de forma que se garantice llantas rígidas.

En caso de ruedas dentadas con llantas de pequeño espesor, que no garanticen un soporte prácticamente rígido para los dientes, la propia flexión de la llanta combinada con la flexión de los dientes permitirá el surgimiento de significativos esfuerzos de compresión en la zona de la raíz del diente que generaran valores importantes de esfuerzos alternativos. Esta situación favorecerá la creación de una grieta por fractura que pueda propagarse en la dirección del máximo esfuerzo por debajo de la raíz del diente.

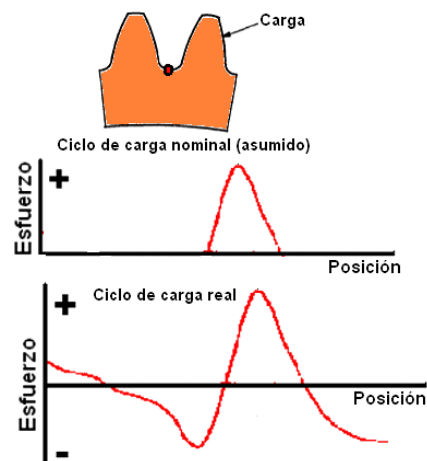


Figura 11. Diferencias entre el ciclo de carga nominal aceptado por las normas ISO y AGMA y un ciclo de carga real en la raíz del diente de una rueda dentada.

4. Consideraciones para evaluar el efecto del espesor de llanta en la resistencia a la fractura de ruedas dentadas.

En 1982, Raymond J. Drago condujo una de las primeras investigaciones [11] reportadas para conocer el efecto del espesor de la llanta en la resistencia a la fractura de las ruedas dentadas. En su trabajo de especialista con la *Boeing Helicopters*, Drago pudo observar varios fallos de ruedas con fractura en llanta y enfrentar el problema de mejorar los diseños de engranajes con las establecidas exigencias de construir ruedas ligeras y resistentes. La anterior situación motivó la introducción de mejoras en el análisis convencional de los esfuerzos en los dientes de transmisiones por engranajes de manera que pudiera ser considerado el efecto del espesor de las llantas en la resistencia a la fatiga de las ruedas dentadas.

Los mencionados estudios y experiencias estuvieron basados en una amplia planificación de experimentos con sensores de esfuerzos (*strain gages*), modelos fotoelásticos y modelos de elementos finitos bidimensionales y tridimensionales. Los resultados de estos primeros estudios permitieron establecer que durante la transmisión del movimiento bajo carga en las ruedas dentadas los esfuerzos bajo la raíz de los

dientes mantenían un comportamiento prácticamente estable en presencia de reducciones del espesor de la llanta, hasta un cierto valor de relación entre el espesor de llanta y la altura del diente donde era observado un abrupto aumento del esfuerzo resultante. Un resumen de los resultados de Drago se muestra en la figura 12.

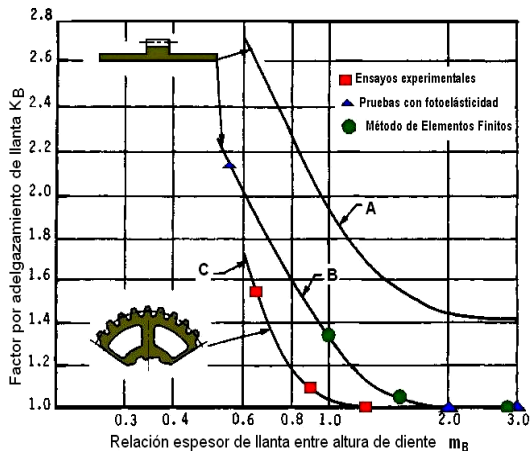


Figura 12. Factor por adelgazamiento de llanta K_B según resultados de Drago. Curva A para carga bilateral sobre el diente. Curvas B y C para carga unilateral en los dientes [11].

Con algunas pequeñas modificaciones, los resultados de Drago son los referidos para valorar

el actual factor por adelgazamiento de llanta K_B en la Norma AGMA 2101-D04. También, en el Comité Técnico ISO de Engranaje (ISO/TC60) fue introducido su análisis en 1989 [12] y finalmente aceptado para calcular el factor Y_B por adelgazamiento de llanta en ISO 6336:1996. La Figura 13 brinda los valores orientados de los mencionados factores en dependencia de la razón de espesor relativo m_B , correspondiente con la relación entre el espesor de la llanta S_R y la altura total del diente h . En las referencias informativas de las Normas ISO [4] y AGMA [6] se establece que diseños de ruedas dentadas con valores de $m_B < 1,2$ pueden localizar el fallo por fatiga a la flexión en la llanta de la rueda antes que en la raíz del diente. La posterior difusión del Método de los Elementos Finitos permitió mejorar los modelos del contacto de los dientes y la obtención de otros comportamientos de la variación de los esfuerzos en el engranaje bajo carga. De esta forma, otros estudios han podido valorar el factor por adelgazamiento de llanta tomando en consideración que el máximo esfuerzo ocurre algo más abajo de la curva de transición del diente (zona crítica por rotura en figura 3).

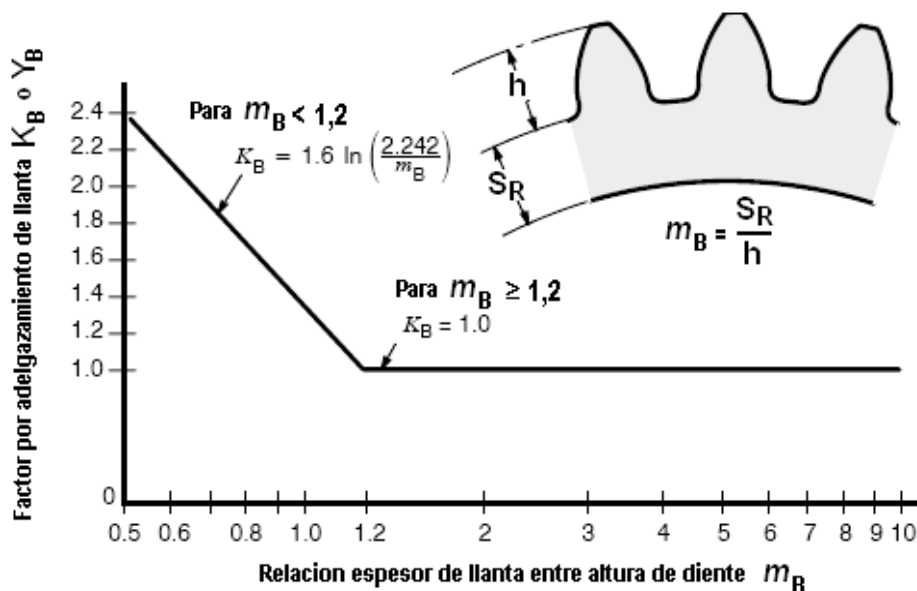


Figura 13. Factor por adelgazamiento de llanta, K_B o Y_B [6].

En general, los estudios han confirmado un comportamiento prácticamente constante de los esfuerzos por flexión según disminuye el espesor de llanta hasta un valor cercano a la altura del diente (recta asintótica a $K_B = 1$ en figura 13), a partir del cual el esfuerzo aumenta rápidamente con reducciones del espesor de llanta.

Sin embargo, no todos reportan igual transición con relación al valor de la razón de espesor relativo m_B . En la Tabla 1, se muestra un resumen de algunos resultados publicados sobre valores límites de la razón de espesor relativo m_{B-Lim} por debajo del cual puede ser localizado el fallo por fatiga a la flexión de la llanta en ruedas de dientes rectos.

Los estudios realizados sobre la influencia del espesor de la llanta en la resistencia de las ruedas dentadas muestran diferencias en la geometría de las ruedas y la rigidez de las llantas en los modelos empleados en el análisis. De tal forma, la rigidez resultante de los dientes y la flexibilidad de la propia llanta de la rueda influirán en la magnitud y localización y magnitud de los esfuerzos resultantes cercanos a la base del diente y por lo tanto en las llantas de las ruedas engranadas. Por consiguiente, deformaciones en una llanta poco rígida aumentarán los esfuerzos de flexión constantes en la raíz del diente, creando condiciones favorables para la propagación de una grieta de fractura transversalmente a la llanta en la dirección del máximo esfuerzo.

Tabla No. 1. Valores reportados del límite inferior de la razón de espesor relativo m_{B-Lim} , a partir del cual el esfuerzo aumenta rápidamente con reducciones del espesor de llanta

m_{B-Lim}	Descripción del modelo	Cantidad de dientes en:		Referencia
		piñón	rueda	
1,7	Un solo diente cargado en un sector de 5 dientes y modelado con elementos finitos		72	Oda, 1981 [13]
0,85	Un diente con extremos rígidos y modelo de elementos finitos.	18		Chang, 1983 [14]
1,4	Modelo con elementos finitos de un segmento de 3 dientes con soporte rígido en los extremos.	25	50	Eiff, 1990 [15]
1,3	Modelo de 5 dientes con elementos finitos con soporte rígido en los extremos del sector.	25	50	Bibel, 1991 [16]
1	Modelo de elementos finitos y ensayos con sensores de esfuerzos.		28	Lewicki, 1996 [3]

En particular, se observa en los reportes de investigación sobre el tema una tendencia al incremento del límite inferior de la razón de espesor relativo m_{B-Lim} en ruedas con mayor cantidad de dientes. Durante el presente trabajo, se realizó un análisis estadístico de los valores límites de m_B declarados en varias de las publicaciones referenciadas en este artículo y se observa una tendencia moderada-fuerte en la relación entre el factor m_{B-Lim} y el número z de dientes de la rueda. Este comportamiento se muestra en la Figura 14 y se expresa analíticamente, mediante una regresión lineal con coeficiente de correlación del 77%, en la siguiente fórmula:

$$m_{B-Lim} = 0,823632 + 0,012038 \cdot z \quad (6)$$

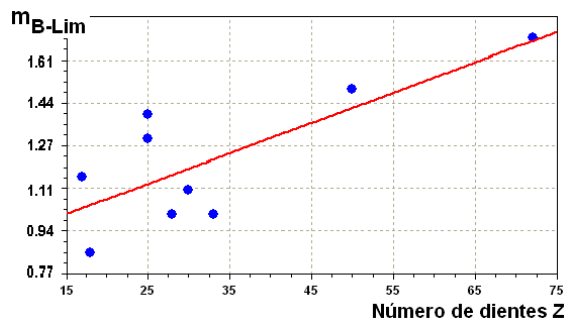


Figura 14. Comportamiento del límite inferior de la razón de espesor relativo m_{B-Lim} en función de la cantidad de dientes de una rueda con llanta fina.

5. Consideraciones para evaluar el efecto de la interrelación de los espesores de llanta y nervio de soporte en la resistencia a la fractura de ruedas dentadas.

En el 2007, nuevos estudios se orientan a resultados más generalizadores. Especialistas de la Universidad Politécnica de Milán en Italia [17], mediante un modelo tridimensional de rueda cilíndrica con dentado recto (ver Figura 15) evaluaron la influencia conjunta del espesor de la llanta y los nervios soporte del núcleo de la rueda en los esfuerzos generados en la base de los dientes.

En el presente trabajo y con base en los resultados declarados por Conrado y Davoli, fueron calculados los valores correspondiente al factor por adelgazamiento de llanta K_B para nueve ruedas dentadas asumidas como casos de análisis, tomando en consideración tres modificaciones de la razón de espesor relativo m_B y tres modificaciones en la razón de espesor relativo del soporte $W = b_s / b$. En la tabla No. 2 se muestran los resultados del cálculo.

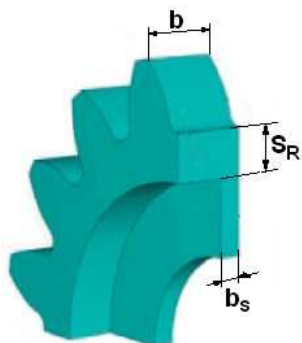


Figura 15. Modelo tridimensional de sector rueda dentada con acotación del espesor de llanta S_R , espesor de soporte b_s y ancho de rueda b [17].

Tabla No. 2. Factor por adelgazamiento de llanta K_B en función de la razón de espesor relativo m_B y la razón de espesor relativo del soporte W . Ver Figuras 15 y 12.

$W = \frac{b_s}{b}$	$m_B = \frac{S_R}{h}$		
	0,5	0,65	0,75
0,2	2,98	2,22	1,90
0,3	2,92	2,21	1,90
0,4	2,87	2,20	1,90
1	2.40	1,98	1,75

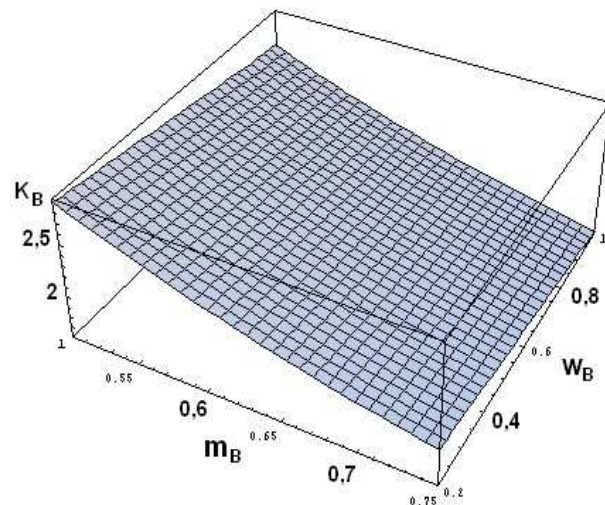


Figura 16. Gráfico del comportamiento de factor por adelgazamiento de llanta K_B en función de la razón de espesor relativo m_B y razón de espesor relativo del soporte W .

La interrelación entre el factor por adelgazamiento de llanta K_B , la razón de espesor relativo m_B y la razón de espesor relativo del soporte W puede ser valorada aproximadamente, en base a un análisis de regresión múltiple en el rango de variables que se declaran en la Tabla 2, con empleo de la siguiente fórmula:

$$Y_B = 6,92345 - 10,6886m_B + 5,56983m_B^2 - 0,40335W \quad (7)$$

Los resultados muestran que ruedas dentadas con razón de espesor relativo de la llanta $m_B \geq 0,75$ registran poca influencia del espesor relativo del soporte en los esfuerzos que puedan ser generados en los dientes y en la llanta.

En contraposición, ruedas dentadas con valores de razón de espesor relativo de la llanta $m_B \leq 0,5$ pueden variar significativamente los esfuerzos en los dientes y en la llanta en dependencia del espesor relativo del soporte de la rueda dentada.

6. Conclusiones.

Experiencias prácticas y estudios posteriores a 1980, han demostrado que engranajes con ruedas de llantas delgadas, trabajando en régimen de carga nominal y con suficiente resistencia a los esfuerzos de flexión en la raíz de los dientes, pueden generar grietas orientadas por debajo de los dientes propagándose a través de la llanta con rotura por fractura de la rueda dentada. En las normas ISO 6336-3:1996 y ANSI/AGMA 2101-D04, se orienta el empleo de un factor por adelgazamiento de llanta Y_B , para valorar la influencia que tiene el espesor de la llanta en el cálculo de los esfuerzos resultantes que pueden provocar la propagación de la grieta de fractura por la llanta delgada.

Varios estudios han reportado un comportamiento constante de los esfuerzos por flexión según disminuye el espesor de llanta en relación a la altura del diente (razón de espesor relativo m_B) hasta determinado valor, a partir del cual el esfuerzo aumenta rápidamente ante reducciones del espesor de llanta. Sin embargo, en los reportes de investigación sobre el tema, se observa una tendencia al incremento del límite inferior de la razón de espesor relativo m_{B-Lim} en ruedas con mayor cantidad de dientes. En la Tabla 1 se muestra un resumen de algunos resultados publicados sobre valores límites de la razón de espesor relativo m_{B-Lim} por debajo del cual puede ser localizado el fallo por fatiga a la flexión en la llanta en ruedas de dientes rectos. Como resultado del presente trabajo, se observó una tendencia moderada-fuerte en la relación entre el límite inferior de la razón de espesor relativo m_{B-Lim} y el número z de dientes de la rueda. Este comportamiento se muestra en la Figura 14 y se expresa analíticamente en la fórmula (6).

En base a los resultados declarados por Conrado y Davoli, en el presente trabajo fueron calculados

los valores correspondiente al factor por adelgazamiento de llanta K_B para nueve ruedas dentadas asumidas como casos de análisis, tomando en consideración tres modificaciones de la razón de espesor relativo m_B y tres modificaciones en la razón de espesor relativo del soporte W . Fue observada una tendencia estadística fuerte en la interrelación entre el factor por adelgazamiento de llanta K_B , la razón de espesor relativo m_B y la razón de espesor relativo del soporte W . La fórmula (7) expresa analíticamente esta interrelación.

Aunque los estudios realizados en engranajes cilíndricos sobre la influencia que ejerce el espesor de la llanta en los esfuerzos resultantes en la raíz de los dientes y en la propagación de la grieta de fractura están en una etapa bastante avanzada, aún los factores por adelgazamiento de llanta contemplados en las actuales Normas ISO 6336-3:1996 y ANSI/AGMA 2101-D04 no toman en consideración aspectos con influencia significativa en la resistencia a la fractura de las llantas, como pueden ser construcciones de llantas biseladas o cónicas, las formas y espesores de los nervios soporte del núcleo de la rueda, los concentradores de tensión en los cubos de las ruedas (chaveteros, estrías y aprietes por interferencia) y el ángulo de orientación de la grieta de fractura, entre otros aspectos.

7. Referencias.

1. **ANSI/AGMA y 1010--E95.** *Appearance of gear teeth. Terminology of wear and failure.* American Gear Manufacturers Association, Virginia. USA, 1995,
2. **LEWICKI, D. y BALLARINI, R.** Effect of rim thickness on gear crack propagation path. En *7th International Power Transmission and Gearing Conference.* ASME. San Diego, California. 1996.
3. **GONZÁLEZ REY, G. y MARRERO OSORIO, S.** *Reingeniería de la geometría y evaluación de la resistencia del engranaje cónico del puente motriz en la transmisión de fuerza de vehículo todo-terreno.* Informe Técnico, 2007.

4. **ISO.** *Calculation of load capacity of helical gears- Part 3: Tooth bending strength.* ISO 6336-3. 1996.
5. **LEWIS, W.** Investigation of the strength of gear teeth, an address to the Engineer's Club of Philadelphia, Octubre 15, 1892. *Reproducido en Gear Technology*, Nov/Dic 1992, vol. 9, nº 6, p. 19.
6. **ANSI/AGMA.** *Fundamental rating factors and calculation methods for involute spur and helical gear teeth.* American Gear Manufacturers Association. Virginia. USA. ANSI/AGMA 2101--D04. 2004.
7. **FILIZ, I. H. y EYERCIOGLU, O.** Evaluation of gear tooth stresses by finite element method. *J. Eng. Industry, ASME*, 1995, vol. 117, nº 2, p. 232-239.
8. **GONZÁLEZ REY, G.; FRECHILLA, F. P., et al.** Finite Elements Method vs ISO 6336 in the calculation of gear load capacity. En *Proceeding of 8th Pan-American Congress of Applied Mechanics*. 2004. p. 169-172.
9. **CEVALLOS, C.** Modelación geométrica de engranajes en Sistemas CAD. *Revista de la Facultad de Ciencias e Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica, Lima. Perú*, 2004.
10. **GONZÁLEZ REY, G.; FRECHILLA FERNÁNDEZ, P., et al.** El Método de Elementos Finitos como alternativa en el cálculo de engranajes. *Ingeniería Mecánica*, 2002, vol. 5, nº 1, p. 55-67.
11. **DRAGO, R. J.** *An improvement in the conventional analysis of gear tooth bending fatigue strength.* AGMA P229.24, 1982.
12. **ISO/TC 60/SC2/W6,** *American proposal for rim thickness factor Yrim. Document N. 390.* ISO. 1989.
13. **ODA, S. y NAGAMURA, K.** Stress analysis by thin rim spur gears by Finite Element Method. *Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineers*, 1981, vol. 24, nº 193, p. 1273-1280.
14. **CHANG, S. H.; HUSTON, R. L., et al.** A finite element stress analysis of spur gears including fillet radii and rim thickness effects,. *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 1983, vol. 105, nº 3, p. 327-330.
15. **VON EIFF, H.; HIRSCHMANN, K. H., et al.** Influence of gear tooth geometry on tooth stress of external and internal gears. *Journal of Mechanical Design*, 1990, vol. 112, nº 4, p. 575-583.
16. **Bibel, GD.; Reddy, S.K., et al.** *Effects of rim thickness on spur gear bending stress.* En *27th Joint Propulsion Conference cosponsored by the AIAA, SAE, and ASME.* Sacramento, California. June 24-26, 1991.
17. **CONRADO, E. y DAVOLI, P.** The "true" bending stress in spur gears. *Gear Technology*, August 2007, nº p. 52-57.

G. González-Rey

Departamento de Mecánica Aplicada. Facultad de Ingeniería Mecánica

E-mail: cidim@mecánica.cujae.edu.cu

Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría" – ISPJAE

Calle 114 #11901 e/119 y 127. Marianao. La Habana. CP 19390. Cuba.