

DetECCIÓN DE LA PRESENCIA DE GRIETAS CERRADAS EN ELEMENTOS TIPO VIGA MEDIANTE LA TRANSFORMADA WAVELET.

J. Rodríguez Matienzo.

Departamento de Mecánica Aplicada. Facultad de Ingeniería Mecánica
Instituto Superior Politécnico *José Antonio Echeverría*.
Calle 114 esq. 127, Marianao 15, Ciudad de la Habana, Cuba
Teléfono: (537) 266 3617 Fax: (537) 260 2267
E – mail: matienzo@mecanica.cujae.edu.cu

(Recibido el 13 de abril de 2007; aceptado el 21 de junio de 2007)

Resumen

La determinación del estado técnico de los sistemas estructurales representa un factor importante en la correcta explotación de los mismos. Existen diversos métodos, en su mayoría visuales, pero que requieren el acceso directo a zonas del sistema y pueden ser poco prácticos cuando los volúmenes de la estructura son grandes [9]. El análisis modal puede ser también empleado, pero también tiene algunas limitaciones. Se ha propuesto a la transformada wavelet como una herramienta de grandes posibilidades en la detección de grietas en estado incipiente. El problema debe ser estudiado tanto práctica como teóricamente, y en el segundo aspecto la correcta representación de la grieta es de importancia fundamental. En este trabajo se representa una grieta cerrada transversal en una viga de Euler-Bernoulli, según la propuesta de Bovsunovsky [1], con modelos continuos y por elementos finitos. Se aplica la transformada wavelet al desplazamiento en los modos de vibración.

Palabras claves: detección de grietas, wavelet, análisis modal.

1. Introducción.

En los últimos 30 años se ha dedicado especial atención al control y determinación del estado técnico de sistemas estructurales [9], tales como puentes, torres, partes del fuselaje de aviones, plataformas *off-shore*, oleoductos y gasoductos, etc. Son conocidos varios métodos (NDT) de amplia aplicación, pero que requieren como norma el conocimiento *a priori* del lugar del defecto, el acceso directo a la zona en que se encuentra y además, para grandes volúmenes, requieren de gran tiempo de ejecución.

Lo anterior despierta el interés por encontrar métodos globales y a la vez que permitan la determinación local de defectos en sistemas estructurales. El empleo de las vibraciones sin duda es muy atractivo, dado por el hecho de que defectos en un estado incipiente afectan la rigidez y amortiguamiento del sistema, pero no influyen de forma notable sobre su masa, lo que presupone que varíe la frecuencia natural, por lo que el análisis modal fue una de las primeras herramientas usadas. Sin embargo los resultados no han sido los mejores en todos los casos por un conjunto de factores que van desde poca sensibilidad, influencias ambientales hasta dificultades prácticas en las mediciones.

El empleo de la transformada wavelet abre un camino muy prometedor y se reporta buen número de trabajos alrededor de la misma y vinculados a la determinación de defectos en estructuras, tanto teóricos a partir de modelos (continuos y por MEF), como experimentales.

En los modelos más empleados se trabaja con grietas abiertas (*saw cut*) que son una representación muy burda de la realidad, pero conservan el carácter continuo del sistema, para ello generalmente se sustituye la grieta por un resorte de torsión. Las grietas de fatiga o cerradas (*breathing crack*) introducen discontinuidades y dificultades adicionales, pero se acercan más a la realidad. La correcta simulación de las grietas es por lo tanto un aspecto primordial.

Son interesantes en este aspecto los trabajos de Sinha-Frisweell [3] (ver figura 1), que emplea una zona triangular a ambos lados de la grieta con rigidez disminuida en modelo por MEF, los de Tian *et al* , (ver figura 2) [4] con un resorte de rigidez propuesta anteriormente por Rizos-Aspragathos [6] y un modelo continuo de una viga aplicando la transformada wavelet, Palacz-Krawzuck, [5] que usan un resorte similar en un modelo continuo y el MAC y COMAC como métodos de análisis, Dado-Shpli [2] usan también el resorte en un modelo por elementos finitos y el análisis modal. Se encuentran en la literatura gran número de trabajos

semejantes con diferentes técnicas de análisis de los resultados y condiciones de contorno, dirigidos en lo fundamental a vigas, algunos pocos a pórticos o estructuras más complejas.

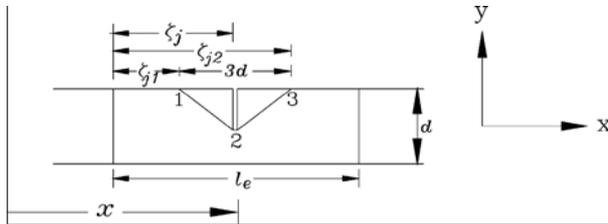


Figura 1. Modelo de Sinha.

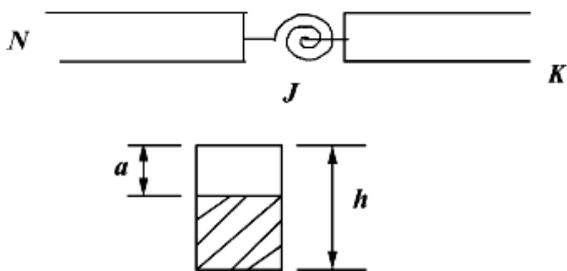


Figura 2. Modelo de Tian y otros.

El caso de una grieta cerrada ha sido menos abordado en la literatura. Chondros-Dimarogonas-Yao [7] emplean un modelo continuo bi-lineal para reflejar el cierre y apertura de la grieta y el análisis modal. Bovsunovsky-Matveev [1] (ver figura 3), emplean una zona de inercia reducida a ambos lados de la grieta, un modelo continuo y el análisis modal.

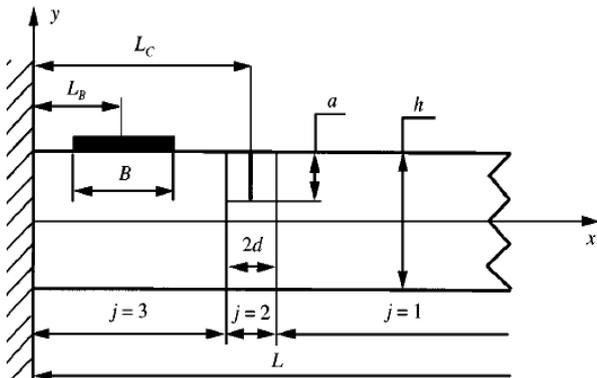


Figura 3. Modelo de Bovsunovsky.

Esta representación permite reflejar el comportamiento del sistema como sistema continuo y a juicio de este autor es hasta el momento uno de los más adecuados.

Modelo dinámico de una viga con una grieta cerrada.

Se trabajó con los modelos de una viga en cantilever con una grieta cerrada transversal, tomando como ejemplo la discutida en [1].

Para simular la grieta, Bovsunovsky se basa en la igualdad bajo ciertas condiciones, de la energía de la deformación en la zona con la grieta y una zona 2 semejante con inercia reducida. La extensión de dicha zona se obtiene por:

$$d = \frac{0,3675h(1-\gamma)}{1-(1-\gamma)^3} [(1-\gamma)^6 - 3(1-\gamma)^2 + 2] \quad (1)$$

Donde:
 $\gamma = a/h,$

La inercia de la sección en esa zona será:

$$I = \frac{b(h-a)^3}{12} \quad (2)$$

En su trabajo Bovsunovsky emplea un tensoelemento para las mediciones y se basa entre otros parámetros, en la disminución de la frecuencia natural para detectar la presencia de la grieta. Se emplea un modelo continuo y una solución bi-lineal.

Para modelar el comportamiento dinámico de la viga se presentan dos opciones: un modelo continuo, según una viga de Euler-Bernoulli; y otro modelo en 2D por elementos finitos.

Modelo continuo.

Se tiene una viga en cantilever con tres tramos:

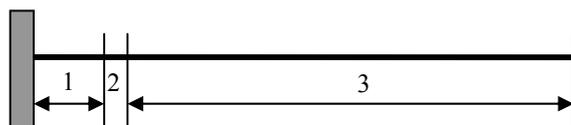


Figura 4. Modelo de la viga con grieta cerrada.

La grieta se simula por la zona 2, los tramos 1 y 3 son semejantes. Se tiene entonces una viga de características de sección transversal variable. Para la determinación se las frecuencias naturales y los modos de vibración se emplea el método de la matriz de transferencia [8].

Las dimensiones de la viga son:
 $l_1 = 0.055 \text{ m}$ $l_2 = 0.010 \text{ m}$
 $l_3 = 0.265 \text{ m}$ $a = 0.005 \text{ m}$
 $b = h = 0.025 \text{ m}$ $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$.

La grieta se encuentra a una distancia $L_c/L = 0,18$.

Se define la matriz **R**, que permite obtener los parámetros a la derecha de un segmento en función de sus valores a la izquierda; y la matriz **J**, que permite obtener los valores de los parámetros a la derecha de una unión entre segmentos en función de los valores a la izquierda. De esta forma para resolver completamente la viga se tendrá que:

$$x_{r3} = R_3 J_2 R_2 J_1 R_1 x_{l1} \quad (3)$$

Donde x_{sn} es:

$$x_{sn} = \begin{bmatrix} X \\ X' \\ X'' \\ X''' \end{bmatrix} \quad (4)$$

y X es la función de forma del modo de vibración correspondiente; R_n se define por:

$$R_n = \begin{bmatrix} C_{0n} & S_{1n} & C_{2n} & S_{3n} \\ k_n^4 S_{3n} & C_{0n} & S_{1n} & C_{2n} \\ k_n^4 C_{2n} & k_n^4 S_{3n} & C_{0n} & S_{1n} \\ k_n^4 S_{1n} & k_n^4 C_{2n} & k_n^4 S_{3n} & C_{0n} \end{bmatrix} \quad k_n^4 = \frac{\omega_n^4 \rho S}{EI} \quad (5)$$

Aquí ρ es la densidad, S el área de la sección, EI la rigidez del tramo considerado y ω la frecuencia natural en r/s. Los coeficientes de la matriz se obtienen por:

$$\begin{aligned} C_{0n} &= \frac{\cos k_n l_n + \cosh k_n l_n}{2} \\ S_{1n} &= \frac{\sin k_n l_n + \sinh k_n l_n}{2k_n} \\ C_{2n} &= \frac{-(\cos k_n l_n - \cosh k_n l_n)}{2k_n^2} \\ S_{3n} &= \frac{-(\sin k_n l_n - \sinh k_n l_n)}{2k_n^3} \end{aligned} \quad (6)$$

La matriz J se define por:

$$J_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (EI)_l / (EI)_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (EI)_l / (EI)_r \end{bmatrix} \quad (7)$$

Luego de efectuar los productos matriciales se llega al resultado siguiente:

$$\begin{bmatrix} X \\ X' \\ X'' \\ X''' \end{bmatrix}_{r3} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ X' \\ X'' \\ X''' \end{bmatrix}_{l1} \quad (8)$$

Para las condiciones de contorno del modelo a la izquierda se tiene que $X=X'=0$, entonces:

$$\begin{aligned} X_{r3} &= p_{13} X''_{l1} + p_{14} X'''_{l1} \\ X'_{r3} &= p_{23} X''_{l1} + p_{24} X'''_{l1} \\ X''_{r3} &= p_{33} X''_{l1} + p_{34} X'''_{l1} \\ X'''_{r3} &= p_{43} X''_{l1} + p_{44} X'''_{l1} \end{aligned} \quad (9)$$

Y para las condiciones a la derecha se tiene que $X'=X''=0$, por lo que la ecuación de frecuencias se reduce a;

$$\begin{vmatrix} p_{33} & p_{34} \\ p_{43} & p_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

Se conoce que aunque esta ecuación se puede resolver analíticamente, lo más directo es su solución numérica. Se van dando valores a ω hasta que la ecuación se haga nula, en este caso 181,43 Hz.

Gráficamente se obtiene el siguiente comportamiento, se muestra la primera frecuencia natural (figura 5).

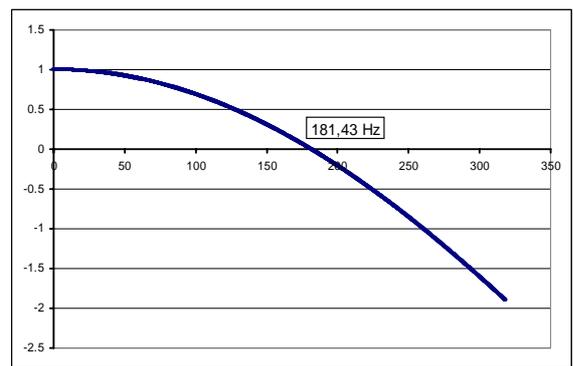


Figura 5. Solución de la ecuación de frecuencias de la viga con grieta de $\gamma=0,2$

Con este valor se obtiene el modo de vibración de la viga X' (ver figura 6a). Es de esperar que haya una falta de continuidad entre los tramos 1-2 y 2-3, pero como se

observa no es visible. Si se analiza X' (se recuerda que $X'=dX/dx$) si se hace perceptible, pero en la práctica solo se puede medir $X(t,x)$ (ver figura 6 b).

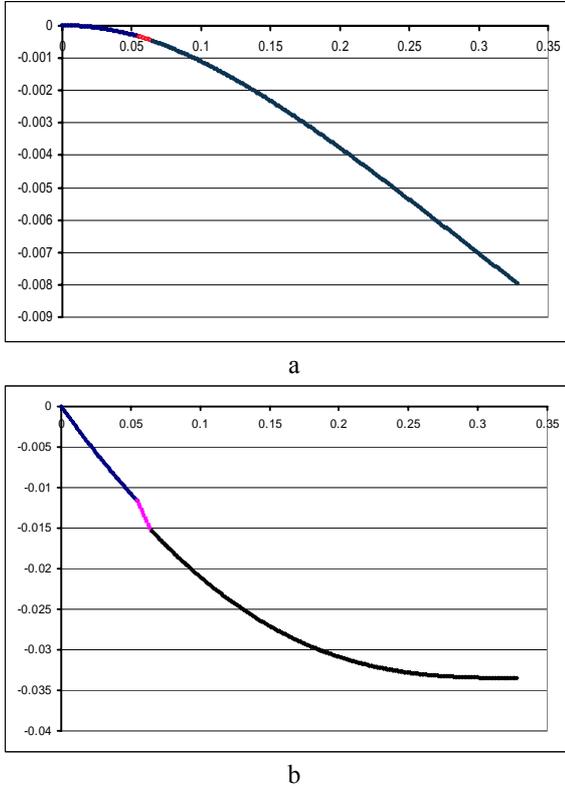


Figura 6. 1er. Modo, función de forma X y su primera derivada.

Se construyó un modelo continuo para la misma viga sin la presencia de la grieta. La primera frecuencia natural resulta ser 187,16 Hz, el primer modo es semejante en su forma al de la viga con grieta.

La diferencia entre las frecuencias naturales resulta en una disminución del 96,9% y diferencia del 3,04%. En el trabajo de Bovsunovsky se obtuvo experimentalmente 92,4 y 4,8% respectivamente y en su modelo también 96,9% de disminución. Como se observa, los resultados son semejantes, aunque lo más significativo es que el porcentaje de diferencia entre las frecuencias naturales es muy bajo y cae dentro del rango del error de una medición experimental, tal como otros autores han planteado. Esto dificulta el empleo de la frecuencia natural como indicador de la presencia o no de una grieta en un sistema.

2. Modelo por elementos finitos.

Se modela la viga empleando elementos lineales de dos nodos, con dos traslaciones y una rotación en cada nodo, de longitud 1 mm, o sea, un total de 329 elementos. Para la representación de la grieta se varía la

inercia de los elementos que caen en la zona 2. La frecuencia natural da 185,9 Hz, contra 191,9 en el mismo modelo con elementos finitos sin grieta.

Los resultados finales para ambos modelos se muestran en la tabla siguiente:

Modos flexión		1er. modo
Frec. Natural, Hz; sin grieta; EF (Continuo)		191.9 (187,1)
Frec. Natural, Hz; con grieta 1, $\gamma=0.2$; (% disminución, % dif.)	EF	185.9 (96,8%, 2.6 %)
Frec. Natural, Hz; con grieta 1, $\gamma=0.2$; (% disminución, % dif.)	Continuo	181,4 (96,9%, 3.04%)

En el modelo por EF se comprueba que también resulta pequeña la diferencia entre las frecuencias naturales.

Análisis de los resultados con la Transformada wavelet.

Se define la transformada wavelet de una función $f(t)$ como:

$$W_{b,a}[f(t)] = \int_{-\alpha}^{+\alpha} f(t)\Psi_{b,a} dt \quad (11)$$

$$\Psi_{b,a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Donde $\Psi_{k,a}$ es la función *mother wavelet*; b es la traslación o dilación y a la escala. La transformada wavelet tiene la propiedad de poder extraer discontinuidades o singularidades locales de una señal en el tiempo o espacio.

La transformada wavelet puede ser discreta o continua. Si se toma:

$$a = 2^j \quad (12)$$

$$b = k2^j$$

Se tiene un conjunto diádico de las coordenadas (a , b), definido como muestreo diádico porque los valores consecutivos difieren en potencias de 2. Usando escalas diádicas se obtiene la *transformada discreta*.

La resolución se define como el inverso de la escala a , donde:

$$\frac{1}{a} = 2^{-j} \tag{13}$$

j se define como nivel. Al disminuir la escala aumenta la resolución y se pueden detectar componentes más pequeños. Esta transformada discreta es más compacta y tiene sus ventajas en cuanto a rapidez y tamaño de los ficheros de cálculo.

La transformada continua emplea una variación continua de ambos parámetros y requiere mas gasto en memoria y tamaño de los conjuntos correspondientes, buscando que los datos sean redundantes (over sampling).

Para los objetivos planteados se prefiere la transformada continua por su mayor resolución, ya que interesa detectar pequeñas singularidades en una señal. Existen diferentes funciones mother wavelet que pudieran ser empleadas. A los efectos de la selección se deben tener en cuenta varios factores, entre estos: *regularidad, soporte y número de momentos de desvanecimiento*. En particular este último es decisivo para detectar singularidades.

Para obtener información sobre la existencia de una singularidad en una función se emplea el llamado exponente de Holder o Lipschitz. Si una señal $f(t)$ es localmente diferenciable en $t=0$, tiene un exponente de Lipschitz de valor 1. Si es no diferenciable en la vecindad de $t=0$, como la función paso, tiene Lipschitz 0. La función delta de Dirac tiene Lipschitz de -1, ni ella ni su primitiva son diferenciables en $t=0$. se observa entonces una relación entre el carácter de la señal y sus primitivas o derivadas y el Lipschitz de la señal, tomar la derivada de la función disminuye su regularidad en 1 e integrarla lo incrementa en 1.

Las singularidades en el desplazamiento del modo de vibración son lugares en que la señal es discontinua. De la figura 6 se observa claramente la discontinuidad en X' , para detectarla analizando X se necesita entonces buscar los puntos de $X(x)$ donde el Lipschitz sea 0.

Si se define que una función $f(t)$ puede ser aproximada localmente por un polinomio en la forma

$$f(t) = c_0 + c_1(t - t_0) + \dots + c_n(t - t_0)^n + C|t - t_0|^\alpha \tag{14}$$

$$= P_n(t - t_0) + C|t - t_0|^\alpha$$

Entonces:

$$|f(t) - P_n(t - t_0)| \leq C|t - t_0|^\alpha \tag{15}$$

Un alto valor de α indica una alta regularidad. Para detectar las singularidades se necesita una transformación de $f(t)$ que ignore la parte del polinomio P_n . Una mother wavelet con n momentos de desvanecimiento es capaz de ignorar en la transformación a polinomios de grado $n-1$.

$$\int_{-\alpha}^{+\infty} t^n \Psi(t) dt = 0 \Rightarrow |Wf(a, b)| \leq Ca^\alpha \tag{16}$$

O sea, la transformada del polinomio es nula y solo queda la relación entre la transformada de la función y el error entre el polinomio y la función, que esta relacionado con la regularidad de la función.

Para detectar entonces una discontinuidad pequeña en la señal desplazamiento del modo de vibración se tomará una mother wavelet que tenga al menos dos momentos de desvanecimiento.

Se procesaron los desplazamientos transversales de ambos tipos de modelos con y sin grieta en *MATLAB* y se probaron varias wavelet, del análisis se concluyó que la función *mexican hat* brinda resultados muy claros, tal como se muestra en las figuras 7 y 8. En las figuras se tiene el valor de los coeficientes de la transformada en función de la dilación b (posición en la viga) y la escala a . para las funciones desplazamiento, para el primer modo sin grieta solo se observan máximos en los extremos de la viga, donde de hecho hay discontinuidades por ser zonas de contorno.

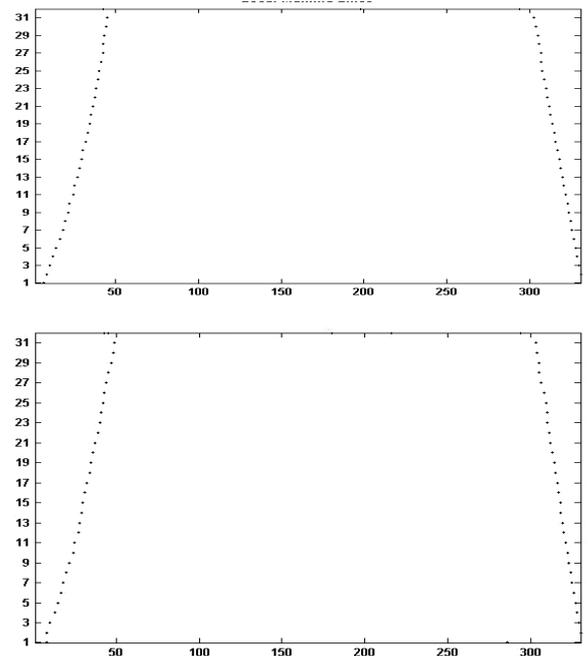


Fig. 7, Máximos de los coeficientes, modo 1, sin grieta, modelo continuo y por elementos finitos.

Cuando se analiza el mismo modo de vibración en ambos modelos considerando la grieta de $\gamma=0.2$, se debe obtener una singularidad en la zona de la grieta, entre las coordenadas 55 y 65 a partir de la izquierda.

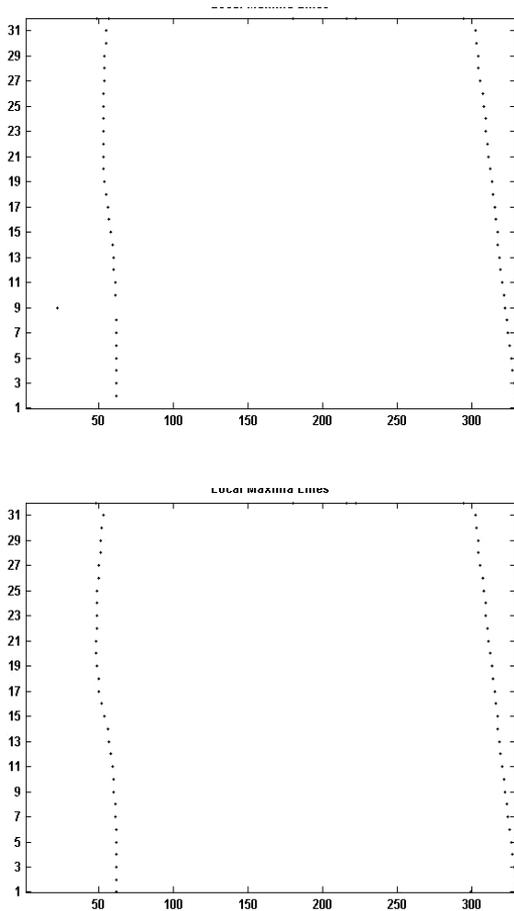


Figura 8. Máximos de los coeficientes, modo 1, con grieta $\gamma=0.2$, modelo continuo y por elementos finitos

Se observan claramente la línea de máximos en la zona arriba señalada, como indicación de la presencia de una discontinuidad en la señal. Si la grieta es mas profunda, $\gamma=0.4$, el comportamiento de ambos modelos es el siguiente:

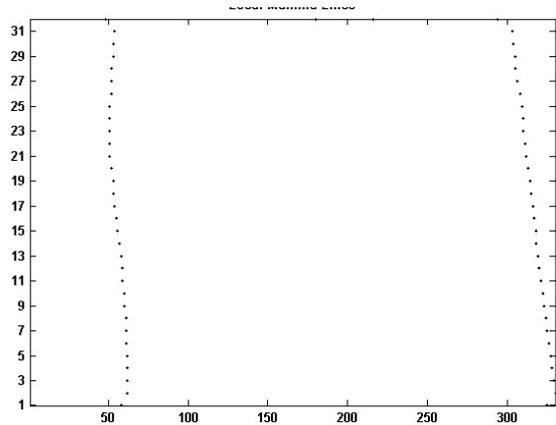
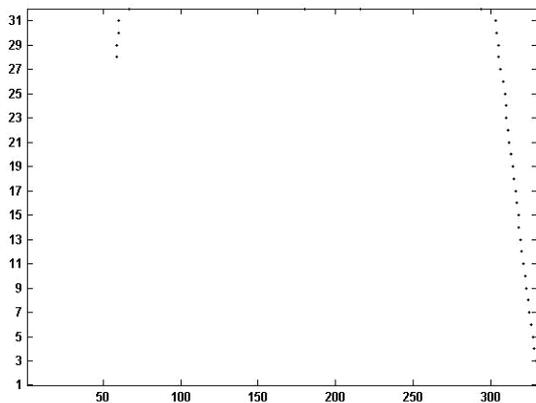


Figura 9. Máximos de los coeficientes, modo 1, con grieta $\gamma=0.4$, modelo continuo y por elementos finitos.

Aquí el modelo continuo no refleja correctamente el problema sino para escalas mayores. El modelo por elementos finitos no tiene dificultades.

3. Conclusiones.

Se puede detectar la presencia de una grieta cerrada aplicando la transformada wavelet a los desplazamientos del modo de vibración. El problema se puede estudiar a partir de modelos por elementos finitos, usando el criterio de Bovsunovsky, sin perder el carácter lineal. Es preciso continuar profundizando para cuantificar otros parámetros importantes como extensión de la grieta. Para ello resulta prometedor el valor del exponente de Lipschitz, que puede obtenerse a partir de los coeficientes.

4. Bibliografía.

1. A. P. Bovsunovsky and v. V. Matveev: analytical approach to the determination of dynamic characteristics of a beam with a closing crack. *Journal of sound and vibration* (2000) 235(3), 415-434.
2. Mohammad H.F. Dado, Omar A. Shpli; Crack parameter estimation in structures using finite element modeling. *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003) 5389-5406
3. Jyoti K. Sinha 1, Michael I. Friswell; Simulation of the dynamic response of a cracked beam *Computers and Structures* 80 (2002) 1473-1476
4. Jiayong Tian, Zheng Li, Xianye Su; Crack detection in beams by wavelet analysis of transient flexural waves. *Journal of Sound and Vibration* 261 (2003) 715-727

5. M. Palacz, m. Krawczuk; vibration parameters for damage detection in structures. *Journal of sound and vibration* (2002) 249(5), 999-1010
 6. P.F. Rizo, N. Aspragathos; Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes. *Journal of Sound and Vibration* 138 (3) (1990) 381-388.
 7. T. G. Chondros a. D. Dimarogonas j. Yao; vibration of a beam with a breathing crack. *Journal of sound and Vibration* (2001) 239(1), 57-67
 8. Pestel, E. C., and F. A. Leckie; "Matrix Methods in Elastomechanics," McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1963.
 9. Hoon Sohn, Charles R. Farrar; A Review of Structural Health Monitoring Literature: 1996-2001. Los Alamos National Laboratory Report, LA-MS, 2002.
-

Losing crack detection in beams using wavelet transform.

Abstract:

The determination of the state of a structure represents an important factor in the use of structural systems. This is known as structural health monitoring (SHM). Several methods, the most of them visual, are employed. These require a direct access to the possible damaged zone and can be very time consuming and costly, a reason by which the researchers in this field are focused in other methods, like modal analysis. The wavelet transform is also a very powerful tool in crack detection in early stages. This problem should be studied in a practical and theoretical way. In this paper a transverse closed crack is represented in an Euler-Bernoulli beam, as Boissinot. Continuous and finite element models are used, and the wavelet transform is applied to the eigenmodes.

Key words: crack detection, wavelet, modal analysis.