

Procedimiento para evaluar el grado de precisión de elaboración del engranaje de tornillo sinfín.

G. Rivero Llerena, L. Martínez Delgado, R. Rivero Galán, J. L. Plasencia González.

Departamento de Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería Mecánica
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, CUJAE.
Calle 114 N° 11901 e/ 119 y 127 Marianao 15, Ciudad de la Habana. Cuba.
Email: grivero@mecanica.cujae.edu.cu

(Recibido el 2 de mayo de 2007; aceptado el 7 de septiembre de 2007).

Resumen.

Esta investigación brinda un procedimiento que permite evaluar el grado de precisión del engranaje de tornillo sinfín cilíndrico con perfil Zk, considerando la geometría externa e interna y los errores de fabricación e instalación propios de la tecnología de elaboración. Se utiliza un procedimiento teórico que, combinado con las mediciones físicas de la huella de contacto, da lugar a un método basado en el empleo de nomogramas que contienen los parámetros del contacto entre los flancos activos del engranaje.

Palabras clave: Tornillo sinfín, geometría, precisión, huella, contacto.

1. Introducción.

La excelencia en la producción de reductores de velocidad de tornillo sinfín, se encuentra en algunos países con elevado desarrollo tecnológico. Cada firma productora tiene su infraestructura para la fabricación y el control de la calidad del producto ofertado, el que presenta la configuración mostrada en la figura 1.

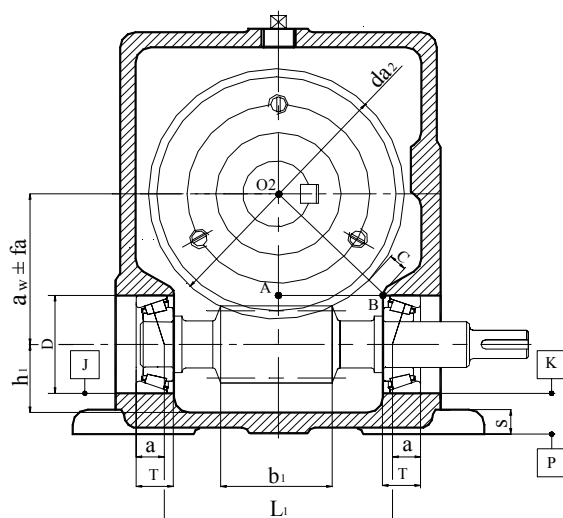


Figura 1. Reductor de velocidad del tipo tornillo sinfín.

En este trabajo se acota la influencia de la geometría de los tres componentes básicos del reductor de velocidad (carcasa, tornillo y rueda) así como sus errores de elaboración e instalación, sobre

el contacto entre los flancos del helicoides del tornillo y de los dientes de la rueda.

La superficie (P) constituye la base de instalación de la carcasa, ella sirve de referencia para la correcta posición de los orificios (J y K) donde se alojan los rodamientos del tornillo. Es decisivo en la vista de la figura 1, la relación entre el diámetro de fondo del helicoides del tornillo y la distancia (L_1) entre los centros de presión de sus rodamientos lo cual guarda relación con el grado de rigidez del subconjunto del tornillo, que influye en el contacto entre los flancos bajo la flexión en la zona de engranaje [1].

En la medida en que crece el diámetro (da_2), debido al incremento de la relación de transmisión o de la distancia entre los ejes (a_w), aumenta la distancia (L_1) hasta un límite máximo para la resistencia a la flexión del tornillo sinfín. Al dimensionar la carcasa debe observarse un riguroso control del triángulo O_2, A, B , dada su relación con el grado de rigidez antes referido y además para evitar excesivas holguras internas (c).

El lugar geométrico de los puntos de contacto de los flancos, depende en buena medida de la posición relativa entre los ejes del tornillo y la rueda (cruzados generalmente en ángulo de 90°), por lo que los errores en la posición de estos respecto a los valores teóricos [2,3], influyen en la huella (mancha) de contacto entre los flancos del engranaje.

La calidad funcional del conjunto mecánico depende de los requisitos señalados hasta aquí y de los errores de elaboración de los tres componentes básicos del reductor citado al inicio.

Como característica del grado de precisión de la transmisión está la huella de contacto. El cociente entre áreas de la huella y del flanco del diente de la

rueda, constituye además un indicador importante de la posibilidad de transmisión de carga del engranaje.

Estas cualidades no están suficientemente explicadas en la literatura especializada, ya que forman parte de la habilidad profesional de firmas experimentadas en la fabricación de este tipo de engranaje.

Los factores situacionales que originan este trabajo tienen sus raíces en los países en vías de desarrollo donde, por razones económicas y por contar con antiguas plantas completas de producción, se lleva a cabo el procedimiento de reconversión [4] de los reductores de velocidad, sin embargo el control de la calidad de la restauración de las cualidades de servicio del nuevo par de engranaje elaborado, aún es un problema sin resolver.

El objetivo es combinar elementos de la geometría del engranaje de tornillo sinfín con los errores de elaboración e instalación, para evaluar la precisión de los pares engranados.

2. Material y métodos.

Para el estudio del problema, aquí se ha desarrollado un procedimiento práctico para obtener y evaluar la huella de contacto real producida en el engranaje de tornillo sinfín cilíndrico con perfil Zk, con el mismo se obtienen las fotografías digitales mostradas en la figura 2.

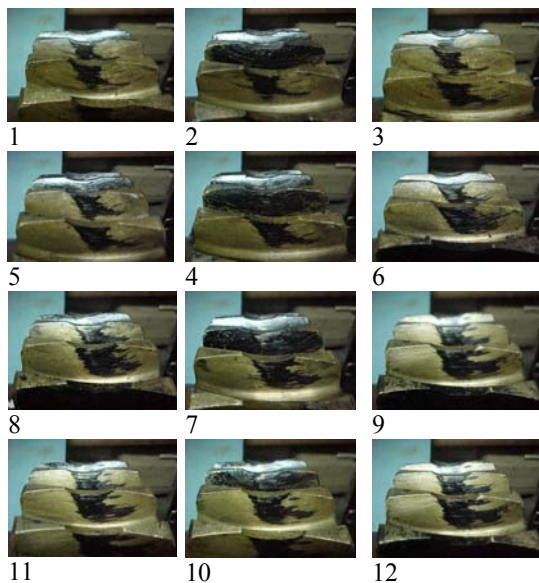


Figura 2. Huella de contacto y flanco del diente de la rueda.

Las imágenes de la figura 2 corresponden a una rueda construida en la Facultad de Ingeniería Mecánica perteneciente al Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, CUJAE. Esta rueda engrana con su tornillo sinfín, también construido en la citada institución con el uso de

herramienta discoidal (tornillo con perfil derivado de cono Zk).

Para favorecer el análisis del contacto entre los flancos activos del engranaje, se ha definido el cociente de áreas φ como [5]:

$$\varphi = \frac{A_{\mu}}{A_d} \quad (1)$$

Donde:

A_{μ} - área de la huella de contacto.

A_d - área del flanco del diente de la rueda.

Un software de tratamiento de imágenes, permite el procesamiento posterior de las mismas, ver tabla 1.

Tabla 1. Píxeles de la huella y el flanco del diente

Diente n°	Píxeles de la huella $A_{\mu i}$	Píxeles del flanco $A_{d i}$	Cociente de áreas φ_i
1	18582	65 201	0,285
2	18286	65 309	0,280
3	18645	65 190	0,286
4	18279	65 280	0,280
5	18489	64 876	0,285
6	21401	65 249	0,328
7	20227	64 950	0,311
8	19992	65 103	0,307
9	20796	64 989	0,320
10	18903	65 183	0,289
11	19629	65 430	0,300
12	21003	65 789	0,319
Valor promedio			0.299

El modelado matemático de todo el campo de la geometría de la transmisión, forma parte del método utilizado para el tratamiento teórico del numerador y denominador de la expresión (1).

2.1 Geometría externa.

La geometría externa vincula entre sí los parámetros geométricos relacionados con las dimensiones del par tornillo-rueda que ha sido engranado, ver figura 1.

Como todo problema de ingeniería, este también podrá ser representado a través de un modelo matemático (M) el cual está compuesto por un conjunto de relaciones (R) definido en un conjunto de variables (V). Simbólicamente: $M = \langle R, V \rangle$.

Las variables usadas aquí se corresponden con la nomenclatura ANSI-AGMA [1] para engranajes de tornillo sinfín cilíndrico, así se tienen las variables:

d_{a1} - diámetro externo (de cresta) del tornillo.

d_1 - diámetro de referencia del tornillo.

d_{f1} - diámetro de fondo (de raíz) del tornillo.

z_1 - número de entradas del tornillo.

γ - ángulo de elevación de la hélice del tornillo en su diámetro de referencia.

p_z - paso axial del tornillo

b_1 - longitud tallada del tornillo.

L_1 - distancia entre apoyos del árbol del tornillo.

da_m - diámetro externo máximo de la rueda.

da_2 - diámetro externo de la rueda.

d_2 - diámetro de paso de la rueda.

df_2 - diámetro de fondo de la rueda

z_2 - número de dientes de la rueda.

z_2' - número de dientes de casación de la rueda.

x - coeficiente de corrección de la rueda.

b_2 - ancho de la rueda.

L_2 - distancia entre apoyos del árbol de la rueda.

a_w - distancia entre centros de los ejes de rotación.

m_x - módulo axial.

m_n - módulo normal.

h_a - altura de cabeza del diente.

h_f - altura del pie del diente.

h - altura total del diente

u - relación de transmisión.

c - holgura radial.

Para resolver problemas de identificación de la geometría (descifrado) o problemas de diseño, el modelo matemático 1 creado [6] consta de:

$R = 21$ relaciones.

$V = 25$ variables, que son:

$\{a_w, p_z, m_x, m_n, u, \gamma, df_1, d_1, da_1, b_1, L_1, z_1, z_2, z_2', x, c, df_2, d_2, da_2, da_m, b_2, L_2, ha, hf, h\}$

Modelo matemático nº 1

1. $\frac{2a_w - df_1}{2,4 + z_2} - m_x = 0$
2. $df_1 + 2,4m_x - d_1 = 0$
3. $2a_w - d_1 - d_2 = 0$
4. $d_2 + 2m_x(1+x) - da_2 = 0$
5. $m_x - ha = 0$
6. $d_1 + 2m_x - da_1 = 0$
7. $\frac{z_2' - z_2}{2} - x = 0$
8. $\arctan\left(\frac{m_x \cdot z_1}{d_1}\right) - \gamma = 0$
9. $m_x \cos(\gamma) - m_n = 0$
10. $d_2 + 3m_x - da_m = 0$
11. $\frac{z_2}{z_1} - u = 0$
12. $2\sqrt{\left(\frac{da_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_2}{2} - ha\right)^2} - b_1 = 0$
13. $ha + hf - h = 0$
14. $\pi m_x - p_z = 0$

$$15. 12m_x - hf = 0$$

$$16. 0,2m_x - c = 0$$

$$17. 1125\sqrt{(da_1 + 2c)^2 - (da_1 - 4ha)^2} - b_2 = 0$$

$$18. 3,3a_w^{0,87} - L_1 = 0$$

$$19. 0,76a_w - L_2 = 0$$

$$20. \frac{d_2}{m_x} - z_2 = 0$$

$$21. d_2 - (1,2 + x)2m_x - df_2 = 0$$

Los problemas de ingeniería son estructurados y están compuestos por el conjunto de variables de entrada (E) y el conjunto de variables de salida (S) que recibirán valores en función de los valores de las variables de entrada [7]. La representación de un problema viene dada como $P = \langle E, S \rangle$.

El modelo matemático 1 resuelve el problema de identificar la geometría externa del par rueda-tornillo, de las imágenes digitales presentadas en la figura 2. El trabajo de confección de los planos ejecutivos de estos dos componentes utilizando las normas internacionales para la representación, permite la fabricación posterior, con la finalidad de ejecutar el trabajo de reconversión de un reductor de velocidad que forma parte del accionamiento de un horno rotatorio para la fundición de aluminio.

2.2 Geometría interna.

La geometría interna está relacionada con el perfil del dentado cuya región de existencia está entre los diámetros de raíz y externo de cada elemento del par engranado. Una sección longitudinal por el eje del tornillo produce idéntico ángulo de perfil en ambos flancos del mismo, en tanto que otras secciones paralelas a la anterior, son asimétricas. La figura 3 muestra como los flancos del helicoides del tornillo sin fin están contenidos en una superficie espacial originada por una recta generatriz, que gira un ángulo ε con rodadura pura sobre la superficie de un cilindro generador de radio básico r_b (cilindro básico).

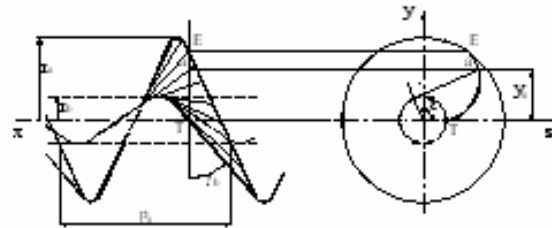


Figura.3. Generación de la superficie rectotrazada general.

Este movimiento sobre el cilindro origina ángulos γ iguales en todas las generatrices. La altura del perfil helicoidal del tornillo con un determinado paso, se extiende desde el cilindro básico hasta el cilindro de cabeza con radio r_a .

En este intervalo se aprecia una variación del ángulo del helicoide γ desde un mínimo en el cilindro de cabeza hasta un máximo en el básico.

En dependencia de la posición relativa de la recta generatriz respecto al cilindro básico, se obtienen diferentes perfiles teóricos de helicoide.

En la práctica los tipos de perfiles se determinan por el método de elaboración empleado. Para aplicaciones particulares se prefieren algunos tipos de perfiles de helicoide, los cuales presentan diferentes

curvaturas en secciones axiales y normales a los mismos y por tanto son expresados por ecuaciones particulares para cada tipo. Internacionalmente se reconocen cinco tipos de perfiles de tornillo sinfín, siendo uno de ellos el perfil derivado de cono (Zk) que es obtenido con una herramienta con forma de disco cónico, situada en posición inclinada a nivel del plano axial según los sistemas de referencia [8] indicados en la figura 4.

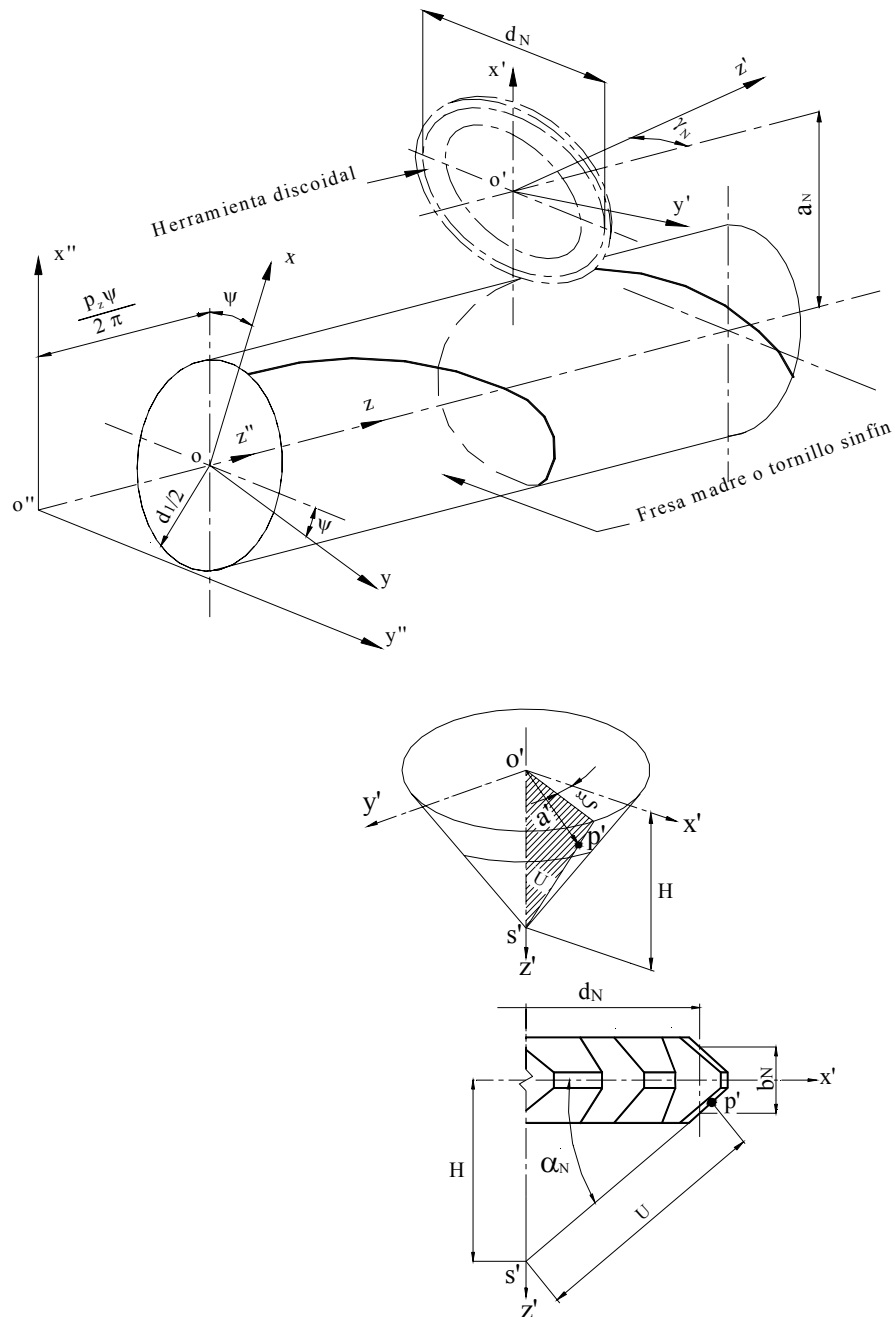


Figura 4. Semiproducto y herramienta discoidal del perfil Zk.

La trayectoria helicoidal se logra como resultado de la rotación y el desplazamiento axial simultáneo del semiproducto que se elabora (tornillo sinfín o fresa madre), en contacto con los bordes cortantes de la herramienta discoidal (fresa de disco o muela abrasiva).

La herramienta cortante empleada posee contorno trapecial en su sección axial (ver el detalle inferior de la figura 4), precisamente por ello se le da el nombre de derivado de cono al asemejarse a dos conos transversales opuestos por el plano de simetría.

Una de las ventajas que presenta el perfil Zk de los tornillos sinfín es que sus flancos se pueden rectificar en rectificadoras de roscas convencionales.

Con los resultados de las investigaciones [5, 8, 9] se ha confeccionado el modelo matemático 2 para la obtención de los puntos de la superficie helicoidal del flanco del helicoide del tornillo sinfín.

Los nuevos parámetros geométricos correspondientes al perfil derivado de cono son; ver figura 4.

- a_N - Distancia interaxial.
- b_N - Ancho de la herramienta a nivel de su diámetro de referencia.
- d_N - Diámetro de referencia de la herramienta discoidal (fresa o muela abrasiva).
- H - Altura del cono generador.

- γ_N - Desplazamiento angular del eje z' de la herramienta discoidal con respecto al sistema fijo $o''x''y''z''$.
- α_N - Ángulo del perfil de la herramienta en el plano normal.
- ψ - Ángulo de rotación del semiproducto (fresa madre o tornillo sinfín) con respecto al sistema fijo $o''x''y''z''$.
- ξ - Ángulo comprendido entre el plano $x'z'$ del sistema de coordenadas adoptado y el plano axial de la herramienta que contiene al punto p' .
- U - Módulo del vector $S'P'$.

Las ecuaciones paramétricas [8] que componen las relaciones desde la 5 hasta la 9 son particulares para todos los casos de tornillos sinfín elaborados con herramienta discoidal (perfil derivado de cono, Zk).

Se ha elaborado aquí un modelo compuesto por:

$R = 9$ relaciones.

$V = 15$ variables que son:
 $\{d_1, m_x, a_N, b_N, d_N, p_z, H, U, \gamma_N, \alpha_N, \psi, \xi, x, y, z\}$

Modelo matemático n° 2

1. $\frac{d_N}{2} + \frac{d_1}{2} - a_N = 0$
2. $\pi \cdot m_x - p_z = 0$
3. $b_N - \frac{m_x \cdot \pi}{2} \cos \gamma_N = 0$
4. $H - \frac{d_N}{2} \tan \alpha_N - \frac{b_N}{2} = 0$
5. $U - \left[\frac{H \sin(\alpha_N) - \frac{a_N}{\cos(\xi)} [\cot(\gamma_N) \sin(\xi) \sin(\alpha_N) + \cos(\alpha_N)] + \frac{p_z}{2\pi \cos(\xi)} [\cot(\gamma_N) \cos(\alpha_N) - \sin(\alpha_N) \sin(\xi)]}{\cos(\xi)} \right] = 0$
6. $\psi - \arctan \left[\frac{U [\cos(\alpha_N) \cos(\gamma_N) \sin(\xi) - \sin(\alpha_N) \sin(\gamma_N)] \pm H \sin(\gamma_N)}{U \cos(\alpha_N) \cos(\xi) + a_N} \right] = 0$
7. $x - \left[\frac{U [\cos(\alpha_N) \cos(\gamma_N) \sin(\xi) \sin(\psi) + \cos(\alpha_N) \cos(\xi) \cos(\psi) - \sin(\alpha_N) \sin(\gamma_N) \sin(\psi)] + a_N \cos(\psi) \pm H \sin(\gamma_N) \sin(\psi)}{\cos(\psi)} \right] = 0$
8. $y - \left[\frac{U [\cos(\alpha_N) \cos(\gamma_N) \sin(\xi) \cos(\psi) - \cos(\alpha_N) \cos(\xi) \sin(\psi) - \sin(\alpha_N) \sin(\gamma_N) \cos(\psi)] - a_N \sin(\psi) \pm H \sin(\gamma_N) \cos(\psi)}{\sin(\psi)} \right] = 0$

2.3 Errores de elaboración y factor de contacto.

Para el comportamiento en servicio de la transmisión por tornillo sinfín, se han establecido tres requisitos técnicos que son [3]:

- Suavidad de trabajo
- Precisión cinemática
- Contacto entre flancos de los dientes y el helicoides.

Los requisitos del contacto entre los flancos de los dientes de la rueda y el helicoides del tornillo, aprobados en la norma de intercambiabilidad [2] para transmisiones con los ejes de rotación en posición ortogonal, prescriben las desviaciones límites de la posición relativa de estos ejes. En la tabla 2 se destaca la influencia que tiene el grado de precisión de elaboración sobre los valores de desviaciones admitidos.

Tabla 2 Errores de elaboración e instalación.

Errores de contacto entre flancos	Símbolo de desviación NC 16-14: 84	En dependencia de
Desviación de la distancia entre ejes.	$\pm f_a$	Grado de precisión de elaboración y distancia entre ejes.
Desviación del plano medio de la rueda.	$\pm f_x$	Grado de precisión de elaboración y distancia entre ejes.
Desviación del ángulo entre ejes.	$\pm f_\Sigma$	Grado de precisión de elaboración y ancho de la rueda.

En la figura 1 se puede ver acotada la desviación $\pm f_a$. Internacionalmente se reconocen grados de precisión de elaboración que van desde el 2 hasta el 12, siendo el grado 2 el que admite los menores valores de desviaciones. La norma de intercambiabilidad [3] contempla los requisitos de contacto entre flancos, aquí se establecen las dimensiones relacionadas con la sumatoria de las manchas (huella) de contacto en % del tamaño del diente a partir del grado de precisión de elaboración de la transmisión.

En consecuencia con la norma [3], en este trabajo se han designando como:

ρ - Sumatoria de las manchas de contacto en % de altura del diente.

δ - Sumatoria de las manchas de contacto en % de longitud del diente.

Teniendo en cuenta la influencia del contacto entre los flancos activos del engranaje por tornillo sinfín, se definió [5] el **factor de contacto** (f_g) como:

$$f_g = \frac{\varphi}{\rho \cdot \delta \cdot \cos \gamma} \quad (2)$$

Donde.

γ : Ángulo de elevación de la hélice del tornillo en su diámetro de referencia.

Este factor de contacto f_g caracteriza la zona de la superficie activa del flanco del diente de la rueda por donde se transfiere la carga proveniente del tornillo sinfín. Esta zona es precisamente la huella de contacto que se origina en condiciones de operación del par engranado.

Las expresiones de cálculo (1) y (2), permiten establecer la dependencia matemática del área de la huella de contacto (A_μ) en el flanco del diente de la rueda construida. Esto constituye una característica de la calidad de la transmisión, que ha sido elaborada con un determinado grado de precisión y para la cual se considera un valor del factor de contacto. Luego sustituyendo (1) en (2) se obtiene que:

$$A_\mu = A_d \cdot \rho \cdot \delta \cdot \cos \gamma \cdot f_g \quad (3)$$

2.4 Cálculo del área del flanco del diente a partir de la superficie del flanco del helicoides del tornillo.

Como resultado de un extenso estudio bibliográfico se escogió un procedimiento para la definición de los puntos del contacto teórico del par engranado. El tratamiento matemático propuesto por S. Akira y T. Akira [10] sirve para el análisis de los puntos de contacto entre los flancos del engranaje con errores, el problema en cuestión consiste en la obtención de las coordenadas de puntos en el espacio, referidos a un nuevo sistema de coordenadas que se encuentra respecto al sistema de origen, trasladado en dos ejes y rotado en dos ejes, lo que se expresa en función de operadores matriciales de traslación y rotación. En este caso el operador de traslación representa los errores (f_a) y (f_x) y el operador de rotación, representa el error de ortogonalidad (f_Σ) en dos direcciones, tanto para la herramienta (h) como para el tornillo (w).

Para este análisis se han definido [10] los sistemas de coordenadas mostrados en la figura 5, los que permiten determinar la posición relativa entre los ejes de la rueda y el tornillo (o fresa madre) sinfín. Aquí se exponen los ejes tridimensionales que pasan por el lugar geométrico de los orígenes de coordenadas (O_g , O_w), donde el plano y,z coincide con el plano axial del tornillo (o fresa madre).

Para el tratamiento del error de ortogonalidad entre ejes, se usa en esta investigación el valor límite del error de ortogonalidad (f_Σ), relativo al ancho (b_2) de la rueda, de donde surge el nuevo término fdw según la relación:

$$fdw = \arctan \frac{f_{\Sigma r}}{b_2} \quad (4)$$

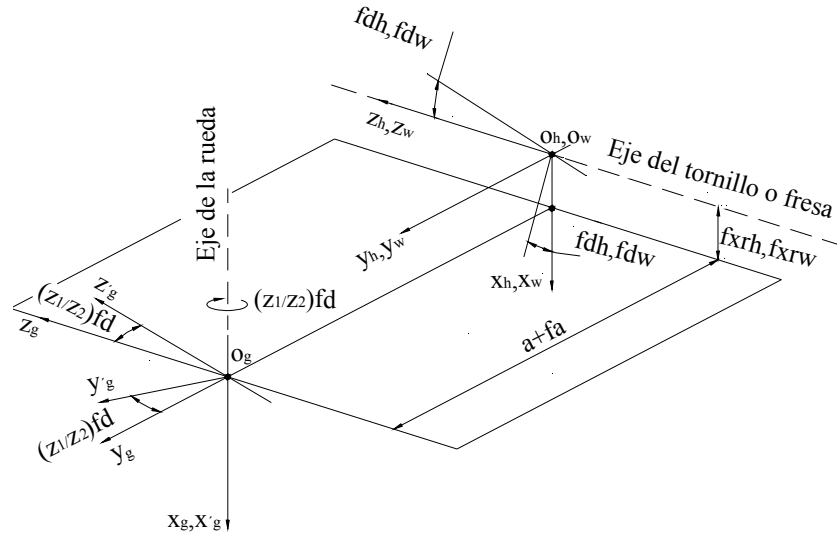


Figura 5. Disposición relativa entre ejes de rotación.

Los parámetros de la figura 5 significan [10]:

a - distancia teórica entre ejes de rotación.

z_1 - n° de entradas (del tornillo o de la fresa madre).

z_2 - n° de dientes de la rueda.

z_h o z_w -eje del tornillo (o de la fresa madre).

x_g x'_g -eje de la rueda.

y'_g z'_g -ejes rotados producto del error fd .

fx fd fa -errores de contacto.

Sub índices:

g - referente a la rueda.

h - referente a la fresa.

w - referente al tornillo.

En la presente investigación [5] se confeccionó el modelo matemático 3 que es utilizado para la obtención de puntos de contacto (x_g, y_g, z_g) en el flanco del diente de la rueda, a partir de puntos con sub índices (t), pertenecientes al flanco del helicoides del tornillo (x_t, y_t, z_t). Para simplificar se ha definido un parámetro auxiliar λ , cuya equivalencia aparece en el propio modelo matemático.

Modelo matemático n° 3

$$1. \quad fdw - \arctan\left(\frac{f_{\Sigma r}}{b_2}\right) = 0$$

$$2. \quad \lambda - fdw \cdot \frac{z_1}{z_2} = 0$$

$$3. \quad \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} o_1 \\ o_2 \\ o_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} o_4 \end{bmatrix} \right\}$$

Las matrices con denominación (o) que conforman la relación 3 perteneciente a este modelo, tienen los siguientes significados:

$$o_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos[fdw(z_1/z_2)] & -\sin[fdw(z_1/z_2)] \\ 0 & \sin[fdw(z_1/z_2)] & \cos[fdw(z_1/z_2)] \end{bmatrix}$$

$$o_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 0 & -\sin 0 \\ 0 & \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix}$$

$$o_3 = \begin{bmatrix} \cos(fdw) & 0 & \sin(fdw) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(fdw) & 0 & \cos(fdw) \end{bmatrix}, \quad o_4 = \begin{bmatrix} f_x \\ a + f_a \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resultando un modelo matemático compuesto por:

$R = 3$ relaciones.

$V = 15$ variables que son:

$$\{x_t, y_t, z_t, f_x, f_a, f_{dw}, f_{\Sigma}, b_2, z_1, z_2, \lambda, a, x_g, y_g, z_g\}.$$

Estos puntos obtenidos de la aplicación del modelo 3 proporcionan la superficie correspondiente al flanco conjugado del diente de la rueda (zona de contacto) que es representada por S en la figura 6.

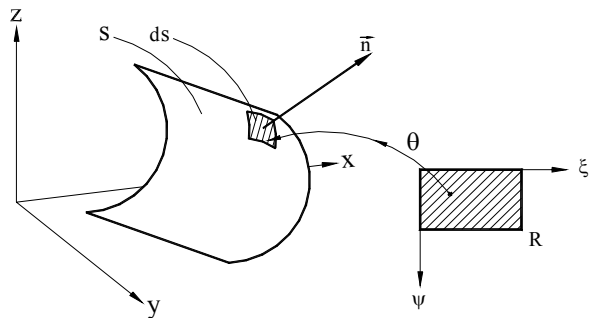


Figura 6. Superficie helicoidal comprendida en la zona de contacto con el flanco del diente de la rueda.

De toda la superficie perteneciente al flanco del helicoides y obtenida con el modelo matemático 2, la superficie de contacto S es expresada como:

$$S: \begin{cases} x = x(\xi, \psi) \\ y = y(\xi, \psi) \\ z = z(\xi, \psi) \end{cases} \quad (5)$$

Con una orientación positiva dada por el vector normal $\vec{n}$ según la figura 6.

Como es conocido, el área de una superficie cualquiera en ecuaciones paramétricas viene dada como:

$$S = \iint_S ds \quad (6)$$

siendo.

$$ds = \left| \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \right| d\xi d\psi \quad (7)$$

Donde θ es una parametrización de la superficie helicoidal S.

Como tienen lugar (6) y (7) se puede plantear que:

$$S = \int_{-\psi}^{+\psi} d\psi \int_0^{\xi} \left| \theta_{\xi} \cdot \theta_{\psi} \right| d\xi \quad (8)$$

Mediante el uso del programa de cálculo Derive 5.0, es posible obtener las derivadas parciales de (7) para las ecuaciones finales de los puntos correspondientes a la superficie S del flanco del helicoides del tornillo.

El uso de la herramienta informática MATLAB 6.0, permite el tratamiento matemático de las ecuaciones paramétricas del perfil Zk, resultando finalmente el área del flanco del diente de la rueda con ancho b_2 , a partir de la superficie del flanco del helicoides del tornillo.

2.5 Cálculo del área del flanco del diente a partir de la geometría externa.

La figura 7 muestra un modelo gráfico creado en esta investigación [5] para la determinación del área del flanco del diente, se aprecian distintas áreas señaladas con números que componiéndose convenientemente, dan como resultado la semiárea del flanco.

El modelo matemático 4 facilita la solución de este problema usando algunas de las variables de la geometría externa de la transmisión.

Modelo matemático n° 4

1. $A - 0,5(da_1 + 2c) = 0$
2. $B - 0,5(df_1 + 2c) = 0$
3. $D - 0,5(2a_w - da_m) = 0$
4. $E - \sqrt{B^2 - D^2} = 0$
5. $\alpha - \arcsen \left[\frac{b_2}{da_1 + 2c} \right] = 0$
6. $F - B \sen \alpha + E = 0$
7. $A_{1234} - \frac{\pi(A^2 - B^2)}{360} \alpha = 0$
8. $A_{367} - F[0,5(D - B \cos \alpha)] = 0$
9. $A_{357} - 0,5[(D - B \cos \alpha)^2 \tan \alpha] = 0$
10. $A_{258} - 0,5[(A \cos \alpha - D)^2 \tan \alpha] = 0$
11. $A_{289} - 0,5[(A \cos \alpha - D)^2 \tan \beta] = 0$
12. $A_d - 2[A_{1234} - (A_{367} + A_{357}) + A_{258} - A_{289}] / \cos \gamma = 0$

Este último modelo matemático está compuesto por:

R = 12 relaciones.

V = 19 variables, que son:

$$\{da_1, df_1, da_m, a_w, b_2, c, \alpha, \beta, A, B, D, E, F, A_{1234}, A_{367}, A_{357}, A_{258}, A_{289}, A_d\}$$

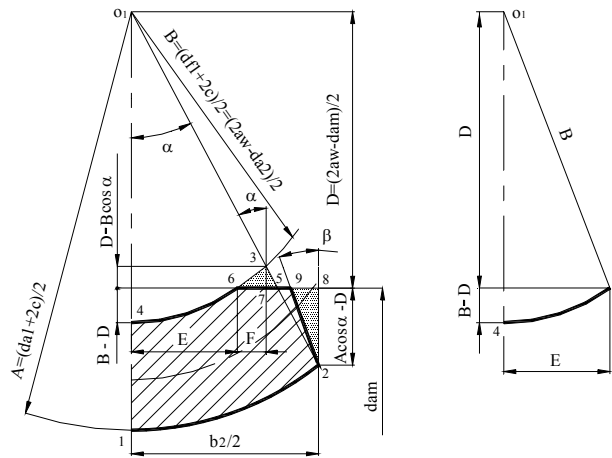


Fig.7. Semiárea del flanco del diente de la rueda.

Para el cálculo automatizado del área (A_d) del flanco del diente de la rueda desde este nuevo punto de vista, se ha programado una herramienta de propósito específico en la que se introducen algunos parámetros fundamentales de la geometría externa como datos de operación para el modelo matemático 4.

La herramienta de una forma rápida y eficiente, con una interfaz amigable diseñada con el uso de Borlan Delphi 6.0, garantiza una fácil interacción.

Los cuatro modelos matemáticos que aquí se exponen muestran la manera de solucionar el problema, ellos facilitan la forma de proceder para la evaluación de la expresión (1), usando el algoritmo que ha quedado formalizado en el esquema de bloques mostrado en la figura 8, cuyo propósito es la obtención del % de aprovechamiento del área del flanco del diente de la rueda (A_d), en relación con el área de la huella de contacto (A_μ), a través del cociente de áreas (ϕ).

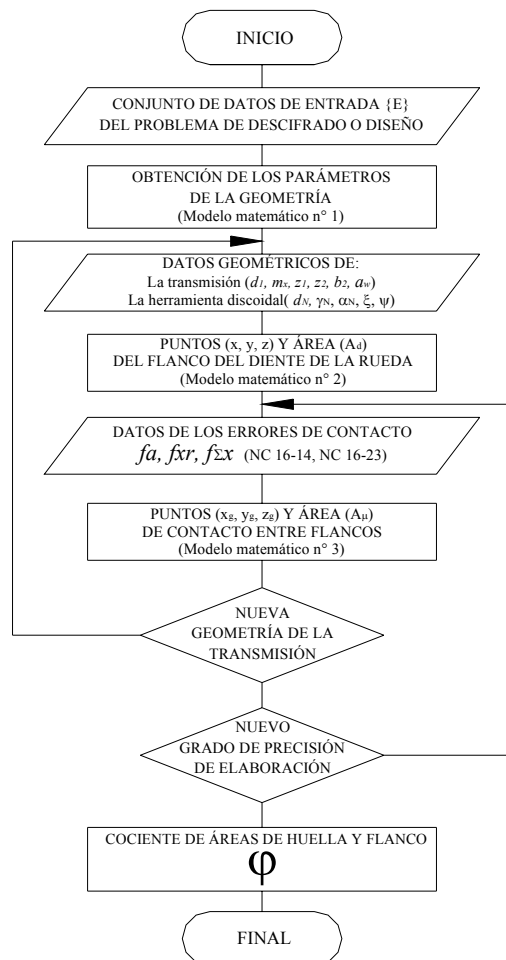


Fig.8 Esquema de bloques del algoritmo del contacto teórico.

3. Resultados.

3.1- El hallazgo principal de este estudio fue la interpretación de las imágenes de la figura 2.

La solución del problema de identificación de la geometría correspondiente a estas imágenes partió del siguiente conjunto de variables de entrada:

$$E_1 = \{a_w=165\text{mm}, da_1=83.20\text{mm}, p_z=25.12\text{mm}, z_1=1\}$$

Siendo el conjunto de variables de salida, las restantes variables que componen el modelo 1 de la geometría externa, el que quedó declarado como:

$$S_1 = \{m_x, m_n, u, \gamma, d_1, df_1, b_1, L_1, z_2, z_2', x, d_2, da_m, da_2, df_2, b_2, L_2, ha, hf, h, c\}.$$

De esta forma el problema se redujo a la expresión:

$$P_1 = \{E_1, S_1\}, \text{ donde:}$$

$$[x] = \{S_1\} - \text{conjunto de las incógnitas}$$

$$f(x) = \{R_1, R_2, \dots, R_{21}\} - \text{conjunto de las relaciones.}$$

El número de grados de libertad [7] del problema se calculó como: $L(p) = [x] - [f(x)] = 21 - 21 = 0$

Al obtenerse el número $L(p) = 0$, se convirtió en un problema compatible y determinado.

3.2- Se introdujeron en el sistema los valores de los datos necesarios de la geometría externa de la transmisión y los de la herramienta discoidal y con la utilización del modelo 2 mediante la herramienta MATLAB 6.0, se trataron las ecuaciones paramétricas de la superficie del flanco del helicoides con perfil Zk, de donde se obtuvo el resultado gráfico de la figura 9.

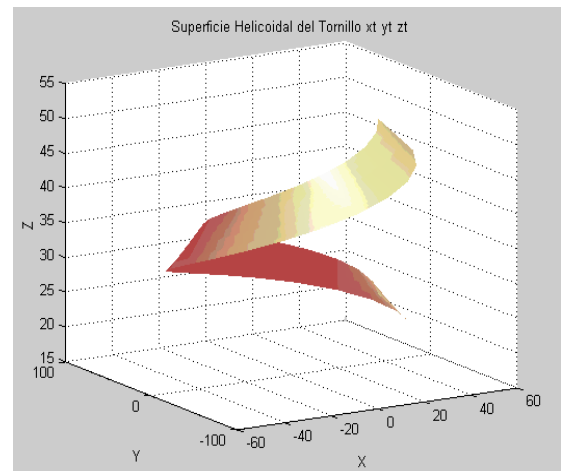


Figura.9. Superficie del flanco derecho del helicoides del tornillo sinfin con perfil Zk.

3.3- De la aplicación del modelo 3, de acuerdo con los resultados de la superficie del flanco del helicoides y considerando los errores de contacto contemplados en las normas de intercambiabilidad, se obtuvo la superficie S, ver figura 6, de los puntos de contacto en el flanco del diente de la rueda. Para esto se evaluaron los límites de integración dados en la expresión (9).

$$S = \int_{-40}^{+40} d_{\psi} \int_0^{3,62} |\theta_{\xi} \cdot \theta_{\psi}| d_{\xi} \quad (9)$$

El programa de cálculo MATLAB 6.0 proporcionó la superficie correspondiente al flanco conjugado del diente de la rueda según se aprecia en la figura 10.

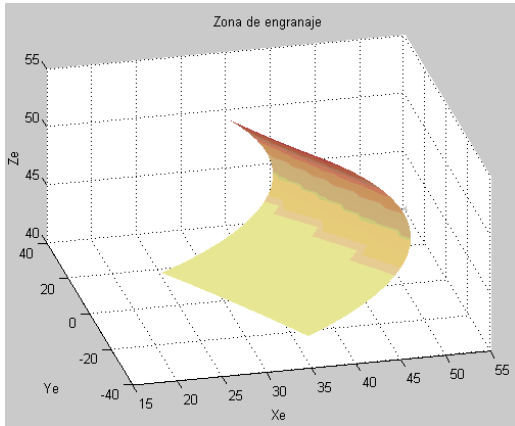


Figura 10. Superficie del flanco del diente de la rueda a partir de las ecuaciones de la superficie del flanco helicoidal Zk.

El área (A_{dp}) correspondiente a los puntos de esta superficie S mostrada en la figura 10, también fue calculada por el programa MATLAB 6.0, de donde se obtuvo como resultado el valor.

$$A_{dp} = 985 \text{ mm}^2 \quad (10)$$

3.4- Para la misma geometría obtenida con el empleo del modelo 1, se evaluó el área del flanco del diente a partir de la geometría externa (A_d), para esto se usó la herramienta de propósito específico creada para la aplicación del modelo matemático 4 cuya interfaz de usuario se muestra en la figura 11.

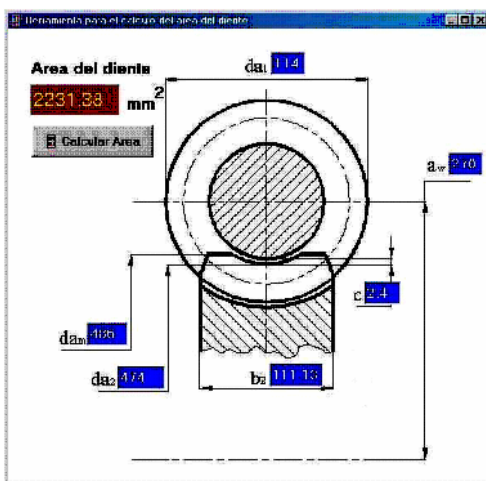


Figura 11. Interfaz de la herramienta de cálculo del área a partir de la geometría externa.

De donde se obtuvo como resultado:

$$A_d = 1042 \text{ mm}^2 \quad (11)$$

Para un error relativo de:

$$\varepsilon = (A_d - A_{dp}) / A_d = (1024 - 985) / 1024 = 3,8 \%$$

3.5- Para la extensión de estos resultados, se tomó como referencia la propuesta de la serie cubana de reductores de velocidad de tornillo sinfín, concebida [8] para satisfacer una parte considerable de las necesidades de la industria cubana, la misma se compone de 128 unidades de reducción que abarcan un rango de potencias entre 0.25 y 15 kW. La geometría del par engranado fue determinada a partir de las normas internacionales y los resultados de las investigaciones llevadas a cabo por el Departamento de Mecánica Aplicada de la Facultad de Ingeniería Mecánica de la CUJAE [8].

Para la evaluación del grado de precisión de elaboración, se analizaron algunos tamaños de reductores de velocidad de la citada serie, para esto se utilizó la combinación de variables geométricas de cada tamaño, obteniéndose la correspondiente área del flanco del diente (A_d) a partir de la aplicación del modelo matemático 4 mediante la herramienta de la figura 11. En las sucesivas evaluaciones de la expresión de cálculo (3), se consideraron diferentes valores del factor de contacto (f_g) para las variaciones (δ y ρ) según los requisitos establecidos por la norma de intercambiabilidad [3] para el tipo de transmisión analizada. Esta valoración se hizo para cada uno de los tamaños de reductores de velocidad escogidos, de donde se obtuvieron los resultados de las correspondientes áreas de la huella (A_{μ}), dando lugar a nomogramas como los de las figuras 12 y 13, para cada uno de los grados de precisión de elaboración, que decrecen desde el 2 hasta el 12.

4. Discusión de resultados.

4.1- La mayor significación de estos resultados es la obtención de un procedimiento para la evaluación del grado de precisión de elaboración del engranaje de tornillo sinfín cilíndrico, involucrando las imágenes digitales de la huella de contacto del engranaje físico.

4.2- Al procesar las imágenes que están en la figura 2, (utilizando el software Photoshop de Premiere que es una de las herramientas para el procesamiento de imágenes digitales, usando para ello la herramienta de selección compleja de áreas y la información estadística de la misma, en especial la cantidad de píxeles contenidos en las áreas), se obtienen los datos reflejados en la tabla 1 con un valor medio de:

$$\varphi_i = 0.299 \quad (12)$$

Al evaluar la expresión (1) siguiendo el esquema del algoritmo de la figura 8 se obtiene el valor de:

$$\varphi = 0.346 \quad (13)$$

Comparando los resultados de (12) (13) se obtiene:

$$\varepsilon = (\varphi - \varphi_i) / \varphi = (0,346 - 0,299) / 0,346 = 13,58 \%$$

Normalmente al tratar los problemas de contacto entre superficies del sólido rígido, resultan discrepancias de este orden entre los pronósticos teóricos y las mediciones físicas [11], además deben tenerse en cuenta las limitaciones presentadas durante el tratamiento de imágenes [12]. Por lo que se acepta como herramienta confiable el procedimiento general para el cálculo teórico del cociente de áreas según el esquema del algoritmo de la figura 8.

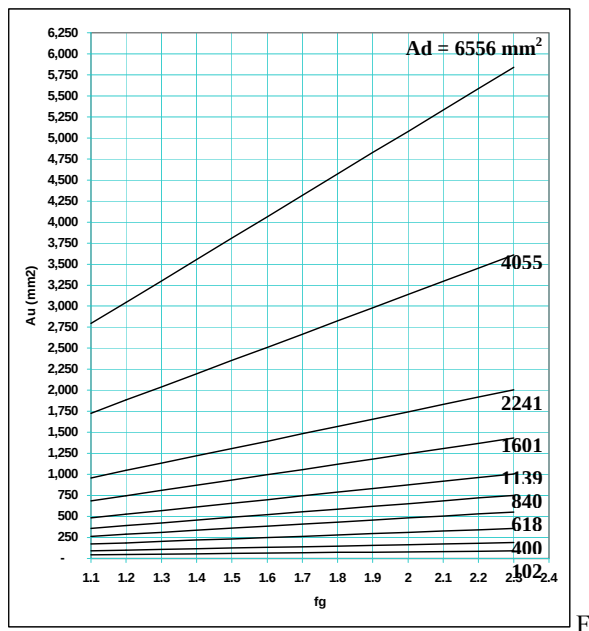


Figura.12 Área de la huella para el 7º grado de precisión. N.B.I 1162-78 (Norma cubana NC 16-23:83)

4.3- Se comprueba la validez de los modelos matemáticos 3 y 4 con una discrepancia de 3.8 % a partir de los resultados de (10) y (11), por lo que se acepta como herramienta confiable el empleo del procedimiento expuesto aquí con la utilización del programa de cálculo MATLAB 6.0, que sirve para el cálculo teórico del área del flanco del diente de la rueda (A_d) a partir de las ecuaciones paramétricas de la superficie helicoidal del tornillo con perfil Zk.

4.4- Se han obtenido nomogramas propios para la caracterización de pares del engranaje de tornillo sinfín a partir de los parámetros del contacto entre flancos: f_g (A_μ , A_d , ρ , δ), de donde se aprecia que al comparar los nomogramas de las figuras 12 y 13 resulta que para igual área (A_d) del flanco del diente, una mayor área de la huella de contacto (A_μ) significa un incremento del grado de precisión de elaboración.

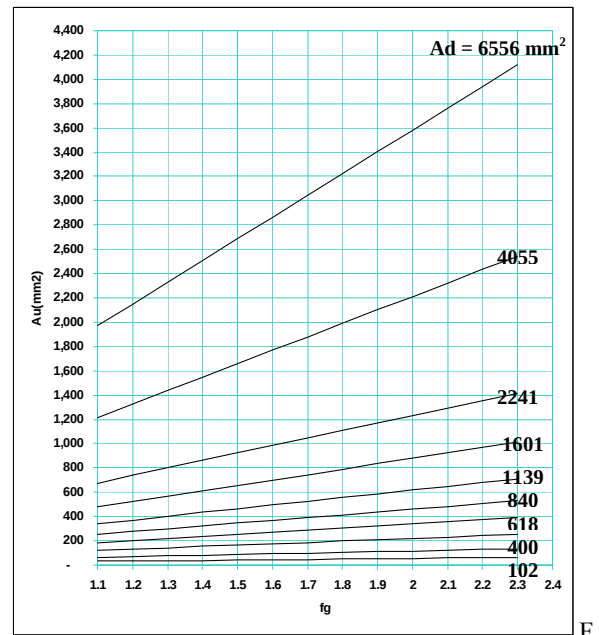


Figura.13 Área de la huella para el 8º grado de precisión. N.B.I 1162-78 (Norma cubana NC 16-23:83)

4.5- Estos resultados indican que se puede evaluar el grado de precisión de elaboración del engranaje de tornillo sinfín aplicando los pasos, desde el (a) hasta el (e), del procedimiento que se propone a continuación:

- Con el algoritmo de cálculo general que incluye los modelos matemáticos 1, 2 y 3, según el esquema de la figura 8, se obtiene el cociente de áreas (φ), el que facilita el cálculo del factor de contacto (f_g) que se colocará en el eje de las abscisas de los nomogramas como se aprecia en las figuras 12 y 13.
- Con la herramienta de cálculo automatizado correspondiente al modelo matemático 4, se obtiene el área del flanco (A_d), ver la figura 14.
- A partir de la cantidad de píxeles de las imágenes del flanco del diente de la rueda construida se obtiene el cociente de áreas (φ), el que permite evaluar según la expresión de cálculo (1) el área de la huella de contacto real (A_μ), ver la figura 14. Este valor se coloca en el eje de las ordenadas de los nomogramas.
- La pareja de variables (A_μ) y (f_g) localizan un punto del nomograma, este punto debe concurrir con la recta correspondiente de la variable (A_d).
- El grado de precisión del par engranado viene dado por el grado del nomograma en el que se obtenga la concurrencia de estas tres variables (f_g), (A_μ), (A_d).

5. Conclusiones.

- Se ha podido apreciar que el procesamiento de las imágenes digitales de la huella (que al estar sobre la curvatura del propio flanco del diente de la rueda quedan afectadas por igual factor de modificación),

resulta una de las herramientas posibles a emplear para evaluar el grado de precisión de la transmisión en dependencia de los errores de elaboración e instalación.

- Para igual área del flanco del diente de la rueda, un mejor grado de precisión de elaboración se corresponde con el incremento del cociente (ϕ), cuyo cálculo es formalizado en la figura 8 para el establecimiento de determinadas características de calidad del par engranado.
- La huella de contacto puede aceptarse como propiedad de precisión integral. En este sentido influye también la falta de simultaneidad del contacto sucesivo entre flancos del helicoides del tornillo y del diente de la rueda, por lo que lo más conveniente es la elaboración de perfiles conjugados, los que se obtienen al realizar el maquinado de acabado de la rueda utilizando una herramienta, fresa madre, con geometría y dimensiones similares a las del tornillo sinfín.

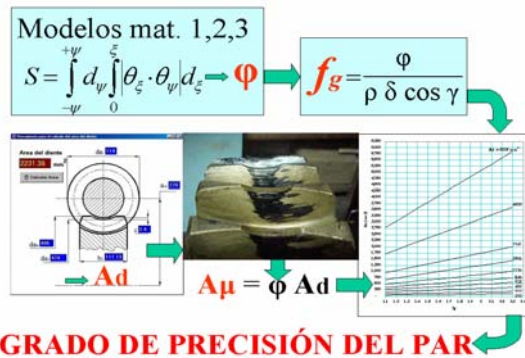


Figura.14. Procedimiento para la evaluación del grado de precisión de elaboración del par engranado.

6. Referencias.

- ANSI-AGMA 6034-B92 Manual for general industrial Cylindrical Wormgearing for Power Transmission, 48 pp. Virginia 1992.
- N.B.I 311-76 Transmisiones sinfín cilíndricas, Tolerancias, 52 pp. (Norma cubana NC 16-14: 84) 1984.
- N.B.I 1162-78 Errores en las transmisiones por tornillo sinfín Cilíndrico y globoidal, 21 pp. (Equivale a la Norma cubana NC 16-23:83) 1983
- Rivero, G. Reconversión de transmisiones por tornillo sinfín, 75 pp, Tesis de Maestría. CUJAE, C. de la Habana, 1997.
- Rivero, G. Determinación del factor de contacto entre los flancos del engranaje por tornillo sinfín con perfil derivado de cono, 116 pp. Tesis de Doctorado. CUJAE, C. de la Habana, 2002.
- Rivero, G. Calixto, B. Descifrado geométrico de transmisiones por tornillo sinfín. Revista Ingeniería Mecánica, vol 3 / n°1, pp 33-40, Cuba enero, 2000.
- Martínez, J. Curso de algorítmica aplicada, Facultad de Ingeniería Mecánica, CUJAE, C. de la Habana 1996.
- Gregori, S. Análisis de las desviaciones entre los perfiles ZI y ZK en transmisiones Sinfín de producción Nacional, 139 pp. Tesis de Doctorado. CUJAE, C. de la Habana, 1988.
- Calixto, B. Serie de herramientas para la producción nacional de transmisiones Sinfín con perfil Derivado de cono, 112 pp. Tesis de Doctorado, CUJAE, C. de la Habana, 2001.
- Simokobe Akira, Thoyama Akira, Tooth bearing and angle transmitting accuracy of Worm Gears. 2 eme Congr. Mond. engren conf. vol 1, S.I. s.a.p 689-697. Paris 3-5 mar.1986.
- Tung SC. Cheng WQ. Simulation test of grease-lubricated steel-polymer interface of worm gear Tribology, Transactions. 41(4):537-542, SOC. TRIBOLOGIST&LUBRICATION ENGINEERS USA, oct. 1998.
- Litvin.F, Seol I. Computarized design, generation and simulation of meshing and contact of modified involute, Journal of Mechanical Designv118 n4 p551(5), dec. 1998.

Procedure to evaluate the degree of accuracy of elaboration of the worm gear.

Summary.

This investigation offers a procedure that allows to evaluate the degree of accuracy of the cylindrical worm gear with profile Zk, whereas clause the external and internal geometry and the manufacturing errors and installation characteristic of the elaboration technology. A theoretical procedure is used that, cocktail wit the physical mensurations of the contact print, gives place to a method based on the nomograms employment that you/they contain the parameters of the contact among the active flanks of the engagement.

Password: worm gear, geometry, precision, print, contact.